

# 多条件约束下投资组合模型研究

张晓鹏,王剑平

(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650500)

**摘 要:**文中基于经典投资组合 MV 模型,研究了现实投资活动中实际存在的多种投资约束条件下的投资组合 MV 模型。通过添加更加细化且贴近实际的约束条件,克服了经典 MV 模型中假设条件过于苛刻同时又不适用于实际生活的缺点,更好地改进并完善了经典 MV 模型的应用。并结合中国证券市场的交易数据对新建立的多条件约束的 MV 模型进行验证分析,以此来说明新建的多条件约束 MV 模型更加合理、有效、可靠,能够很好地指导投资者稳健地选择投资方案,以达到最好的收益结果。

**关键词:**多条件约束;Cover 约束;MV 模型投资组合

**中图分类号:**TP39

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2013)06-0211-03

**doi:**10.3969/j.issn.1673-629X.2013.06.054

## Research on Multiple Constraints Portfolio Mode

ZHANG Xiao-peng, WANG Jian-ping

(College of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

**Abstract:** In this paper, a portfolio MV model is studied with multiple constraints that exist in real investment activities. Comparing with the classical MV model, through adding more refined and practical constraints, the new MV model overcomes the disadvantage of hypothesis conditions too harsh and impractical. It improves the application of classical MV model better. Combined with transaction data of stock market of China, the new multiple constraints MV model is verified. The results show that the new multiple constraints MV model is reasonable, effective and reliable. It is very good guides for the investors to select investment solutions.

**Key words:** multiple constraints; Cover constraint; MV model portfolio

### 0 引言

股票投资是高收益、高风险的金融投资活动,如何在增加收益的同时有效地控制和度量投资风险已经成为普通百姓、投资机构和学术界所共同关心的焦点问题。1952年,Markowitz发表了堪称现代金融理论里程碑的论文——《投资组合选择》。该文阐述了权衡收益和风险水平的定量方法,并建立了均值-方差模型的基本框架,用于求解投资决策过程中的资金在投资对象中的最优分配问题。通常称此模型为均值-方差(Mean-Variance,简称MV)模型,经典的MV模型为<sup>[1]</sup>:

$$\min \frac{1}{2} x^T V x \text{ s. t. } r^T x \geq R, \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

这里  $n$  表示可投资证券数目,  $r_i (1 \leq i \leq n)$  表示证券  $i$  的期望收益率,  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  为可投资证券期

望收益率形成的  $n$  维向量,用  $x_i$  表示投放于第  $i$  种证券的资金在总额中的比例,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是相应的  $n$  维决策向量,而  $\sigma_{ij}$  表示第  $i$  种证券和第  $j$  种证券随机收益间的协方差,  $V = (\sigma_{ij})$  是相应的  $n \times n$  阶方差-协方差矩阵,  $R$  则是希望达到的收益率目标。

针对原始 MV 模型的不足, Siddharaha (1988) 在经典 MV 模型中引进了交易量约束和逻辑约束<sup>[2]</sup>, Perold (1984) 则在改进的 MV 模型中考虑了最大和最小购买量、交易费等投资约束<sup>[3]</sup>, Hamza 和 Janssen (1998) 考虑了交易费用和最小交易单位做为约束条件的投资组合选择模型<sup>[4]</sup>。以上学者虽对 MV 模型进行了改进,但他们所研究的约束条件并不是十分的全,且所给求解算法均存在效率差<sup>[5]</sup>。国内陈叔平等 (2000)<sup>[6]</sup> 用风险函数作风险的度量,大大提高了 MV 模型的实用性。

收稿日期:2012-09-07

修回日期:2012-12-12

网络出版时间:2013-03-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11101193)

作者简介:张晓鹏(1986-),男,硕士研究生,研究方向为组合最优化及其应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20130305.0815.010.html>

条件风险价值 CVaR (Conditional Value-at-Risk) 也称为平均超额损失、平均短缺或者尾部,其意义可理解为:在一定的置信水平上损失超过 VaR 的潜在价值。相比 VaR, CVaR 更易体现投资组合包含的潜在风险<sup>[3]</sup>,并且在投资组合优化决策时,以 CVaR 作为优化目标,可采用线性规划的方法求解,求解过程中还可以得到投资组合的 VaR 值。CVaR 用数学表达式可表示为:

$$\text{CVaR}_k = \text{VaR}_k + E[f(x, y) - \text{VaR}_k | f(x, y) > \text{VaR}_k] = E[f(x, y) | f(x, y) > \text{VaR}_k]$$

其中:  $X$  是  $n$  种资产的投资权重向量;  $Y$  是引起组合价值发生损失的市场因子 ( $X, Y$  都是  $n$  维向量);  $f(x, y)$  表示组合的预期损失函数;  $k$  是置信水平。

$$\text{VaR}_k = \min \{ \alpha \in R; \psi(x, \alpha) \geq k \}$$

从而有:

$$\text{CVaR}_k = \text{VaR}_k + E[f(x, y) - \text{VaR}_k | f(x, y) > \text{VaR}_k] = (1 - k)^{-1} \int_{f(x, y) \geq \text{VaR}_k(x)} f(x, y) p(y) dy$$

文中建立了多现实条件约束及 CVaR 模型风险评估法约束下的 MV 方程,此方程能更好更合理地指导投资者找到最佳的投资组合<sup>[7]</sup>。

## 1 多约束条件下的 MV 方程

### 1.1 约束条件

#### 1.1.1 投资预算约束

设  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$  表示  $n$  种证券的价格向量,而  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  表示投资于  $n$  种证券的交易量向量,  $b$  则表示投资者用于投资的最大金额,此约束可表示为:  $p^T x \leq b$ 。

#### 1.1.2 交易量约束

用  $l_i$  表示投资者自己设定或者由证券市场规定的关于某一证券交易数量的限制。此约束可表示为  $l_i \leq x_i \leq u_i$ , 如果  $l_i < 0$  表示投资者购买证券  $i$ , 则购买量应位于区间  $[0, u_i]$ , 如卖出则卖出量应在  $[l_i, 0]$  之间。

#### 1.1.3 最小交易单位约束

我国证券市场最小买入交易量<sup>[8]</sup>是 100 股,最小卖出交易量是 1 股。此交易约束<sup>[9]</sup>可表示为:  $\frac{x^b}{100} \in Z^+, x' \in Z^+$ , 式子中  $x^b, x'$  表示的分别是购进和卖出的第  $i$  种证券数量。

#### 1.1.4 行业(板块投资比例)约束

假设共  $m$  类行业,投资者希望在投资中第  $j$  类行业的投资上下限比例分别为  $a_j \leq X_j \leq \bar{a}_j, j = 1, \dots, m$ , 则该约束可表示为:  $a_j \leq \sum_{i=1}^m x_i D_{ij} \leq \bar{a}_j, j = 1, \dots, m$ 。

其中  $D_{ij}$  为虚拟变量,当股票  $i$  属于第  $j$  类行业(板

块)时,  $D_{ij}$  取值为 1, 否则为 0。

#### 1.1.5 投资组合总的变化大小的约束

该约束可描述为:  $\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \leq C$ , 其中  $C$  是投资者设定的购买总量,  $x_i^0, x_i$  表示的分别是投资组合前后对第  $i$  种证券的持有量。

#### 1.1.6 交易成本约束

交易成本主要包括交易手续费、过户费及印花税等,这些费用都是按成交额的一定比例来收取,假设买卖比例成本系数分别为  $Q_b, Q_s$ , 则这些成本可以表示为:

$$Q_b p_i (x_i - x_i^0)^+, Q_s p_i (x_i - x_i^0)^- \\ \text{这时: } (x_i - x_i^0)^+ = \max(x_i - x_i^0, 0) \\ (x_i - x_i^0)^- = -\min(x_i - x_i^0, 0)$$

#### 1.1.7 最小收益率约束

当考虑税收和交易费用时,预期净收益函数<sup>[10]</sup>  $R(x, y)$  为:  $R(x, y) = y^T x - t_1 - t_2 - q^T x$  则在最小收益率为  $\mu$  下,有:

$$R(x, y) = y^T x - t_1 - t_2 - q^T x(1 + k) \geq \mu \left\{ \sum_{i=1}^n q_i x_i + \sum_{i=1}^n k_i q_i (u_i + v_i) \right\}$$

将  $t_1, t_2$  代入,有:

$$R(x, y) = \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n k_i q_i (u_i + v_i) - \sum_{i=1}^n k y_i x_i - q^T x^0(1 + k) \geq \mu \left\{ \sum_{i=1}^n q_i x_i + \sum_{i=1}^n k_i q_i (u_i + v_i) \right\}$$

其中:  $x_i - x_i^0 = u_i - v_i, u_i \geq 0, v_i \geq 0$

上述约束可用 0-1 变量来表示,设  $y_i \in \{0, 1\}, y_i = 1$  表示投资于证券  $i$ , 对应的  $y_i = 0$  则表示不投资于证券  $i$ , 上述三类约束可分别表示为:

相依投资约束:  $y_i \geq y_j, i \in N_1, j \in N_2$

联立投资约束:  $y_i \leq y_j, i \in N_3, j \in N_4$

相斥投资约束:  $y_i \leq 1 - y_j, i \in N_5, j \in N_6$

## 1.2 广义 MV 模型的建立

为得到多条件约束的简洁而统一的数学表达,引入四个变量  $x_i^b, x_i^s, z_i^b, z_i^s$ , 在最小交易单位约束中,  $x_i^b$  表示证券  $i$  的买入量并且满足  $x_i^b \geq 0, x_i^s$  表示证券  $i$  的卖出量并且满足  $x_i^s \geq 1, z_i^b, z_i^s$  为 0-1 变量,当  $z_i^b = 1$  时表示真正购买证券  $i, z_i^s = 1$  时表示真正卖出证券  $i, z_i^b = z_i^s = 0$  则表示不买也不卖。由于持有人不能同时进行买、卖操作,故应满足  $z_i^b + z_i^s \leq 1$ 。投资者对证券  $i$  的最终持有量为  $x_i = x_i^b + x_i^s - x_i^0$ 。

若记  $X^b = (x_1^b, \dots, x_n^b)^T, X^s = (x_1^s, \dots, x_n^s)^T$  则上述的约束可以重新简化为:

$$\text{预算约束: } p^T (X^b - X^s) \leq b$$

交易成本:  $Q_b p_i x_i^b, Q_s p_i x_i^s$

投资组合总的变化大小约束:  $\sum_{i=1}^n (x_i^b - x_i^s) \leq c$

逻辑约束可以表述为:

$$z_i^b + z_j^s \geq z_j^b + z_i^s, i \in N_1, j \in N_2$$

$$z_i^b + z_j^s \leq z_j^b + z_i^s, i \in N_3, j \in N_4$$

$$z_i^b + z_i^s \leq 1 - (z_j^b + z_j^s), i \in N_5, j \in N_6$$

$$z_i^b + z_i^s \leq 1; z_i^b, z_i^s \in \{0, 1\}, i = 0, 1, \dots, n$$

交易量限制约束:  $z_i^b u_i^0 \leq x_i^b \leq z_i^b u_i, z_i^s l_i \leq x_i^s \leq z_i^s l_i^0$ ,

这里  $u_i, u_i^0$  分别表示购入第  $i$  种证券的上下界, 而  $l_i, l_i^0$  则表示卖出第  $i$  种证券的上下界。

整合多现实条件约束及 CVaR 模型风险评估法约束下的 MV 方程, 此方程模型如下:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} x^T V x - \alpha \sum_{i=1}^n r_i p_i (x_i^0 + x_i^b - x_i^s) + Q_b \sum_{i=1}^n p_i x_i^b \\ & + Q_s \sum_{i=1}^n p_i x_i^s, \\ \text{s. t. } & A(X^b - X^s) \leq b, \sum_{i \in N_i} (x_i^b - x_i^s) \leq C, \\ & z_i^b u_i^0 \leq x_i^b \leq z_i^b u_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ & z_i^b + z_j^s \geq z_j^b + z_i^s, i \in N_1, j \in N_2, \\ & z_i^b + z_j^s \leq z_j^b + z_i^s, i \in N_3, j \in N_4, \\ & z_i^b + z_i^s \leq 1 - (z_j^b + z_j^s), i \in N_5, j \in N_6, \\ & z_i^b + z_i^s \leq 1; z_i^b, i = 1, 2, \dots, n, z_i^b, z_i^s \in \{0, 1\}, i = 1, \\ & 2, \dots, n, \\ & x_i^b, x_i^s \in Z^+, i = 1, 2, \dots, n, \\ & \text{CVaR}_k = \text{VaR}_k + E[f(x, y) - \text{VaR}_k | f(x, y) > \\ & \text{VaR}_k] = (1 - k)^{-1} \int_{f(x, y) \geq \text{VaR}_k(x)} f(x, y) p(y) dy \end{aligned}$$

其中  $A$  是由预算约束系数<sup>[11]</sup> 和其他可用投资量的线性组合构成的投资约束系数矩阵<sup>[12]</sup>。

## 2 MATLAB 辅助投资组合模型求解的实证分析

引入数据前, 必须引入股票的月投资收益率, 计算

$$\text{公式为: } r_{it} = \frac{p_i - p_{i-1} + 1}{p_{i-1}}$$

股票  $r_{it}$  指的是股票  $i$  在第  $t$  个区间的收益率,  $p_i, p_{i-1}$  表示的分别是股票  $i$  在第  $t$  个区间和第  $t-1$  个区间的收盘价, 而  $1$  表示在第  $t$  个区间的股利收入。

先假设目标收益率, 用 MATLAB 求出收益率的协方差矩阵, 然后求出当目标收益率一定时, 模型中最优的  $X^T$  值, 同时求出  $\sigma^2$  的值, 即得出了要面临多大的风险度。运用 MATLAB, 求出协方差矩阵(见表 1)。

表 1 月收益率协方差矩阵

方差	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
$r_1$	0.007 502	-0.000 31	0.000 210 4	-0.001 27	0.006 34
$r_2$	-0.000 41	0.009 732	-0.006 315	-0.001 25	0.008 814
$r_3$	0.000 21	-0.001 21	-0.000 778	-0.000 68	-0.010 21
$r_4$	-0.001 16	0.008 614	-0.010 116	0.004 59	-0.000 55
$r_5$	0.006 34	-0.005 62	0.003 0631	-0.000 54	0.095 979

将协方差矩阵带入模型, 在假定目标收益率下, 就会得到模型的最优解。但是, 风险随着期望投资收益率的增加会产生怎样的变化呢? 期望投资收益率发生变化时, 风险大的股票比例又会产生怎样的变化呢? 这些可通过最优规划求解后的结果分析出来(见表 2)。

从表 2 可以看出, 以 0.019 的目标收益率做为界限, 在此之前, 方差是随着目标收益增加而减小的, 而在此之后, 伴随着目标收益率的增加, 风险也在逐渐增加。

## 3 结束语

为了克服现有国内股票市场证券投资基金投资风险度量方法的不足, 文中通过引进现实交易中存在的多种交易约束, 得到了广义的模型, 该模型可较好地刻画实际中的交易情况, 文中采用中国证券市场中的数据进行了实证分析, 新模型不仅能合理反映不同投资约束对最优投资决策的影响, 而且可以为投资者提供理想的投资建议。

表 2 一定目标收益率下各股票的最优投资比例

收益率	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	方差
0.016	0.28	0.190 75	0.126 34	0.346 44	4.12E-03	0.138 67	0.000 675 4
0.017	0.198 22	2.16E-01	0.130 51	3.30E-01	9.53E-04	0.132 03	0.000 631 2
0.018	0.196 46	2.38E-01	0.138 85	2.95E-01	-6.32E-19	0.132 05	0.000 596 7
0.019	0.192 65	2.61E-01	0.147 11	2.70E-01	-1.65E-18	0.126 71	0.000 584 0
0.020	0.188 05	2.67E-01	0.154 47	2.49E-01	-2.75E-18	0.122 75	0.000 587 2
0.021	0.185 46	0.311 71	0.162 65	0.221 58	-8.74E-18	0.118 52	0.000 614 3
0.022	0.181 67	0.335 78	0.170 69	0.197 41	-7.65E-18	0.114 58	0.000 657 3

(下转第 218 页)

同点,所以 SVM 和 PNN 的各种分类准确率很高。BP 神经网络以经验风险最小化为基础,一味地减少与训练集的误差,出现了“过拟合”的现象,导致泛化能力降低,所以 BP 神经网络的各种分类准确率不高。综上所述,在文中采集的数据集的基础上,运用三种方法对室内舒适度进行综合评价,其中基于 SVM 舒适度评价方法的性能稳定且分类准确率高。

表 3 三种方法性能的比较

方法	平均训练时间(s)	平均预测准确率(%)	最高预测准确率(%)	交叉验证准确率(%)
SVM	0.0039	100.00	100.00	100.00
BP	2.1094	76.67	95.83	72.67
PNN	0.0398	95.83	95.83	99.17

### 3 结束语

文中根据群体感觉和个体感觉建立了一个基于支持向量机的室内舒适度评价方法混合评判模型,并编写了基于 SVM 的室内舒适度评价算法。通过与其他神经网络评价方法对比分析发现,该方法的训练时间少且分类准确率高。

实现了制作室内环境数据集的方法。参照文献[7]的展望部分,根据已标签的样本和领域知识,并利用半监督模糊聚类分析的方法对数据集进行聚类,进而推测出其他样本的标签。

由于文中方法数据预处理时使用半监督模糊聚类算法给原始数据集聚类,提高了分类准确率,所以用支持向量机和半监督模糊聚类算法的融合算法分层处理原始数据集<sup>[12]</sup>是今后研究的一个重点。

### 参考文献:


- [1] 张甫仁,杨昭,郁文红.室内环境评价物元模型及可拓评价方法[J].天津大学学报,2005,38(4):307-309.
- [2] 刘大江.基于熵-未知测度模型的住宅建筑节能评价研究[J].价值工程,2011(2):75-76.
- [3] Dounis A I, Caraiscos C. Advanced control systems engineering for energy and comfort management in a building environment: A review[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2009, 13(6): 1246-1261.
- [4] de Vries B, Steins R J. Assessing working conditions using fuzzy logic[J]. Automation in Construction, 2008, 17(5): 584-591.
- [5] 谢东坡,秦华锋,余成波.基于模糊理论的室内环境舒适度监测系统研究[J].中国测试技术,2008,34(4):126-128.
- [6] 赵博,连之伟,周湘江.基于神经网络的室内热舒适评判模型[J].哈尔滨工业大学学报,2003,35(12):1437-1438.
- [7] 张方方.室内环境多信息融合算法的研究[D].重庆:重庆理工大学,2010.
- [8] 李婷,陈渊馨.室内环境舒适度的神经网络建模与仿真[J].计算机仿真,2011,28(6):189-192.
- [9] Vapnik V N. 统计学习理论[M].许建华,张学工,译.北京:电子工业出版社,2004.
- [10] 室内舒适度训练集和测试集[EB/OL]. 2012-08-21. <http://www.datatang.com/datasets/detail.aspx?id=43623>.
- [11] Chang Chih-Chung, Lin Chih-Jen. LIBSVM: a library for support vector machines[EB/OL]. 2001. <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>.
- [12] 李向阳,李玲娟,陈建新.面向情感感知的不确定性数据融合策略[J].计算机技术与发展,2012,22(2):127-130.

(上接第 213 页)

### 参考文献:

- [1] Markowitz H. Portfolio Selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [2] Syam S S. A dual ascent method for the portfolio selection problem with multiple constraints and linked proposals[J]. European Journal of Operations Research, 1998, 108(1): 196-207.
- [3] Andre F P. Large-scale portfolio optimization[J]. Management Science, 1984, 31(10): 1143-1159.
- [4] Hamza F, Janssen J. The mean-semivariances approach to realistic portfolio optimization subject to transaction costs[J]. Applied Stochastic Models and Data Analysis, 1998, 14(4): 275-283.
- [5] Brorsen B W, Buck D W, Konntz S R. Hedging Hard Red Winter Wheat: Kansas City versus Chicago[J]. The Journal of Futures Markets, 1998, 18(4): 449-466.
- [6] 陈叔平,李胜宏,吴雄伟.一类投资组合优化问题的求解及实证分析[J].高校应用数学学报 A 辑,2000,15(4):491-498.
- [7] 陈炜,张润彤,杨玲.存在融资条件下证券组合选择的一种模糊决策方法[J].北京交通大学学报,2007,6(1): 67-70.
- [8] 华仁海,仲伟俊.对我国期货市场价格发现功能的实证分析[J].南开管理评论,2002,5(5):57-60.
- [9] 华仁海,陈百助.我国期货市场价格收益及波动方差的长记忆性研究[J].金融研究,2004(2):52-61.
- [10] 张卫国.不相关证券组合投资优化模型及实证分析[J].系统工程理论与实践,1998,18(4):34-40.
- [11] 华仁海,仲伟俊.我国期货市场价格收益、交易量、波动性关系的动态分析[J].统计研究,2003,7(7):25-29.
- [12] 于维杰.组合证券投资的有效边界[J].数理统计与管理, 1996, 15(3): 27-31.

## 多条件约束下投资组合模型研究

作者: 张晓鹏, 王剑平, ZHANG Xiao-peng, WANG Jian-ping  
作者单位: 昆明理工大学理学院, 云南昆明, 650500  
刊名: 计算机技术与发展   
英文刊名: Computer Technology and Development  
年, 卷(期): 2013, 23(6)

本文链接: [http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_wjfz201306054.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201306054.aspx)