

基于共轭梯度分解算法的电网谐波估计

蒲小丽,王丽平

(南京航空航天大学 理学院,江苏 南京 210016)

摘要:快速准确地对电网信号的谐波进行检测与估计,对提高现代电力系统的工作效率有重要意义。传统的快速傅立叶变换(FFT)方法速度较快,但精度不高。近年来,很多学者将谐波估计归结为一个线性极小二乘问题,并用奇异值分解(SVD)算法求解。这类方法虽然提高了精度,但奇异值分解的计算量较大,尤其大规模问题,不能达到“即时”的要求。文中基于共轭梯度分解(CGD)方法对电网中的信号进行谐波估计,不仅降低了SVD算法的计算量,同时提高了FFT的精度,并能应用到严重畸变的定期信号的估计上。初步实验结果验证了该方法的有效性。

关键词:奇异值分解;共轭梯度分解;快速傅立叶变换;谐波估计;线性极小二乘方法

中图分类号:TM711

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2013)02-0202-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2013.02.052

Power System Harmonics Estimation Based on Conjugate Gradient Decomposition Algorithm

PU Xiao-li, WANG Li-ping

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: It is significant to detect and estimate the harmonics of signal for improving the efficiency of the power system quickly and accurately. The traditional FFT method is fast, but the precision is not good. Recently, many new methods are proposed, which results in a linear least square problem, which is solved by singular value decomposition (SVD) algorithm. This kind of method improves the precision, but when dealing with the large scale problems, it can not achieve the "instant" requirement because of the large amount of calculation of singular value decomposition. In this paper, use the conjugate gradient decomposition (CGD) algorithm to estimate the harmonics of signals in power system, it not only reduces the computation of SVD algorithm, but also improves the precision of FFT, and can be applied to the serious distortion of periodic signal estimation. The numerical simulation results indicate that the algorithm is effective.

Key words: singular value decomposition; conjugate gradient decomposition; the fast Fourier transform (FFT); harmonics estimation; linear least squares method

0 引言

现代频率电流转换器产生大量的谐波分量的频谱,严重恶化了传递能量的质量,增加了能量流失的同时降低了电力系统的可靠性^[1,2]。因此,谐波是电力质量的重要指标之一,它的测量近几十年来在世界范围内得到广泛的关注。为保证供电系统中所有的电气、电子设备能在电磁兼容意义的基础上进行正常、和谐的工作,必须采取有力的措施,抑制并防止电网中因谐波危害所造成的严重后果。

谐波测量伴随着交流电力系统发展的全过程,诞生了频域理论和时域理论,形成了多种谐波测量方法。

其中基于傅立叶变换的谐波测量是当今应用最多,也是最广泛的一种方法。它由离散傅立叶变换过渡到快速傅立叶变换的基本原理构成。使用此方法测量谐波,准确度较高,功能较多,使用方便。但是存在两大缺点:栅栏效应和频谱泄漏效应。为了缓解FFT方法的限制,在过去的几年中已经提出了很多新的改进方法^[3-7],这些新方法的优势主要依靠信噪比,虽然改进的方法提高了测量的精确度,但同时也增加了计算量。

谱分析基本分三步:

1. 选择一个时间序列模型;
2. 估计预测模型的参数;
3. 计算谱估计。

文中所选用的是AR模型,同时产生一个超定方程,并用极小二乘法来解决这个方程,而奇异值分解算法和共轭梯度分解算法都是解决方程的矩形超定系统

收稿日期:2012-05-24;修回日期:2012-08-28

基金项目:国家自然科学基金青年项目(11001128)

作者简介:蒲小丽(1987-),女,硕士研究生,研究方向为数值最优化;王丽平,副教授,硕士生导师,研究方向为数值最优化。

较可靠的、稳定的方法,其中共轭梯度分解算法在某种程度上更实用。

1 SVD 方法的应用原理

假设电压或电流的波形为如下不知道幅角和相位的谐波的和^[8]:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N X_k \cos(w_k t + \varphi_k) + k_s e(t) \quad (1)$$

其中 X_k 代表振幅, w_k 表示幅角, φ_k 表示第 k 个谐波的相位, N 表示谐波的数量, $e(t)$ 表示附加的高斯白噪声, k_s 为已知的系数。假设 x_1, x_2, \dots, x_n 为波形的 n 个被测样本, 被测样本数通常大于谐波数, 即 $n > N$ 。谐波的估计等价于解决如下一个代数方程的超定系统

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ \dots \ (h_l)]^T$,

$\mathbf{b} = [x_{l+1} \ x_{l+2} \ \dots \ x_{n-l}]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_l & x_{l-1} & \dots & x_1 \\ x_{l+1} & x_l & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-l} & x_{n-l-1} & \dots & x_{n-l-l} \end{bmatrix}$$

其中 l 为数据 AR 模型的阶 ($N \leq l \leq n - \frac{N}{2}$), 向量 \mathbf{h} 由 AR 模型的脉冲响应函数^[9] 的系数组成。

$$H(z) = 1 - \sum_{i=1}^l h_i z^{-i} \quad (3)$$

方程(2) 求解向量 \mathbf{h} 的解决方法主要是通过如下公式

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (4)$$

由 SVD 的应用原理^[8], 在这个方法中将矩阵 \mathbf{A} 表示为如下形式

$$E = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{h} - \mathbf{b}\|_2^2$$

其中 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 分别为 n 维和 l 维的正交方阵, \mathbf{S} 为 $m \times n$ 维的拟对角阵, 对角线元素为奇异值 s_1, s_2, \dots, s_p , 按降序排列, 即

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p$$

在这个系统中起决定作用的是前 p 个非零奇异值和奇异向量, 因此可选取合适的前 r 个列向量重新组成 $\mathbf{U}_r, \mathbf{S}_r, \mathbf{V}_r$, 这样即可求得方程(2) 的解, 即

$$\mathbf{h} = \mathbf{V}_r \mathbf{S}_r^{-1} \mathbf{U}_r^T \mathbf{b}$$

基于此, 多项式方程(3) 的系数向量 \mathbf{h} 即求得。

在公式(4) 中, 矩阵 \mathbf{A} 的奇异值与 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的特征值和特征向量有关, 计算代价比较大, 而计算 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的共轭向量的计算代价相对小很多; 同时考虑将矩阵 \mathbf{A} 分解得到的两个正交投影矩阵转化成一个正交投影矩阵和一个非奇异矩阵来进一步节约计算量。由此文中考虑

到共轭梯度分解算法。

2 共轭梯度分解算法的原理及应用

2.1 共轭梯度分解算法的原理

共轭梯度分解 (CGD) 算法并不是一种新的算法, 它是在基于共轭梯度法^[10,11] 针对对称正定矩阵的基础上提出的。事实上, 这种分解方法不是线性代数学的新理论, 但是它对于矩阵分解的经典结果给出了特别的解释, CGD 有和 SVD 类似的一些性质, 但是却丧失了独立性和正交性。从计算的角度看, 因为 SVD 和 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的特征值和特征向量有关, 所以计算代价非常大。然而, 求得对称正定矩阵的共轭向量的计算代价却相对 SVD 小很多, 这也是研究矩阵 CGD 的意义所在, 同时类似于 SVD 算法, 将 CGD 推广到一般的矩阵而不仅仅是方阵。类似于奇异值的定义, 给出矩阵的共轭值的定义^[12]。

定义1 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 秩为 k , 则存在非奇异矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和正交矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}^{-1}$$

其中 $\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 定义如下:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$\gamma_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i}, i = 1, \dots, k$ 且 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_k > 0$, 把 γ_i 称为 \mathbf{A} 的共轭值。

定义2 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 秩为 k 且 $m \leq n$, 则存在非奇异矩阵 $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 和正交矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-T} \mathbf{\Gamma} \mathbf{U}^T$$

其中 $\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 定义如下:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$\gamma_i = \sqrt{\mathbf{s}_i^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{s}_i}, i = 1, \dots, k$ 且 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_k > 0$, 把 γ_i 称为 \mathbf{A} 的共轭值。

2.2 共轭梯度分解的算法流程

(1) 算法1。

输入: $m \times n$ 矩阵, 秩为 k

1. 初始化: $p_1 \neq 0, p_1 = \frac{r_1}{\|r_1\|_2}$
2. for $i = 2, \cdots, k$
- 2.1 用共轭梯度分解方法计算 $A^T A$ 的共轭向量 p_i
 $q = A p_{i-1}, r_i = r_{i-1} - \alpha A^T q,$
 $p_i = r_i + \beta p_{i-1}, p_i = \frac{p_i}{\|p_i\|_2}$
- 2.2 计算 $q_i, q_i = \frac{1}{\sqrt{q^T q}} q$
3. 在 A 的零子空间中找到 $p_j, j = k + 1, \cdots, n$ 和所有的 $p_i, i = 1, \cdots, k$ 正交
4. 在 R^m 中找到 q_j , 且 $\|q_j\|_2 = 1$ 和 q_i 正交
- (2) 算法 2。

- 输入: $m \times n$ 矩阵, 秩为 k
1. 初始化: $p_1 \neq 0, p_1 = \frac{r_1}{\|r_1\|_2}$
2. for $i = 2, \cdots, k$
- 2.1 用共轭梯度分解方法计算 AA^T 的共轭向量 p_i
 $q = A^T p_{i-1}, r_i = r_{i-1} - \alpha A q,$
 $p_i = r_i + \beta p_{i-1}, p_i = \frac{p_i}{\|p_i\|_2}$
- 2.2 计算 $q_i, q_i = \frac{1}{\sqrt{q^T q}} q$
3. 在 A 的零子空间中找到 $p_j, j = k + 1, \cdots, m$ 和所有的 $p_i, i = 1, \cdots, k$ 正交
4. 在 R^n 中找到 q_j , 且 $\|q_j\|_2 = 1$ 和 q_i 正交

2.3 基于共轭梯度分解算法估计谐波

定理 1^[12] 对于任意 $m \times n$ 矩阵 A , 秩是 k , 而且 $m \geq n, A^Y$ 分解为

$A^Y = P \Gamma^+ Q^T$

且 $A^Y = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{p_i^T A^T A p_i}} p_i q_i^T$

其中 Γ^+ 是 Γ 的广义逆。
因此方程(2) 的求解也即方程(4) 的解如下

$h = A^Y b = \sum_{i=1}^k \frac{q_i^T b}{\sqrt{p_i^T A^T A p_i}} p_i$

因为对于信噪比, 类似于奇异值, 只有较大的共轭值对应谐波信号, 其余的几乎没有影响, 因此可适当选择前 r 个共轭值组成新的极小二乘的解, 即

$h = A^Y b = \sum_{i=1}^r \frac{q_i^T b}{\sqrt{p_i^T A^T A p_i}} p_i$

基于此, 多项式方程(3) 的系数向量 h 可求得, 显然, 在上式解中并不要求得任何一个共轭值, 只需知道是从第几个共轭值开始发生递变的即可, 这也是研究 CGD 算法的意义所在, 同时相对于 SVD 算法更进一步的达到‘即时’的效果。

为了研究共轭梯度方法的可行性, 文中给出一个小的模拟实验, 同时为了比较, 同样的实验、同样的样本数和样本周期也用 FFT 和 SVD 来执行, 研究所用的是电脑 Intel(R) Core(TM) i3 CPU M370 @ 2.40GHz, 2GB 内存, Matlab 7.5 版本。

3 模拟波形的实验

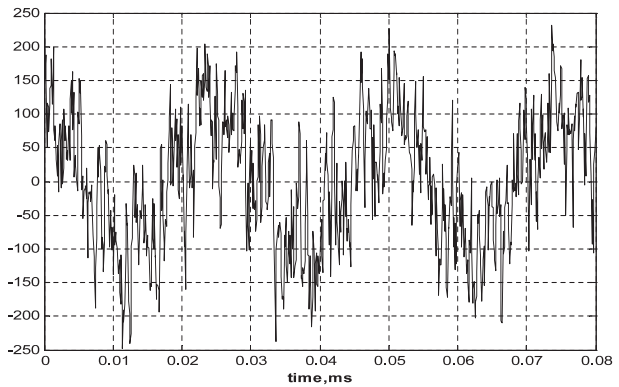
为了研究共轭梯度分解算法的有效性, 给出基于共轭梯度分解求解最小二乘问题的电力系统谐波估计的实验, 假定信号波形的方程为:

$x(t) = 100\cos 2\pi 40t + 50\cos 2\pi 217t +$

$40\cos 2\pi 760t + 40\cos 2\pi 1000t + k_s e(t)$

(5)

其中 $e(t)$ 为均值为零, 方差为 1 的高斯白噪声。这个信号波形包含基本分量($f=40\text{Hz}$), 较高的谐波($f=1000\text{Hz}$ 和 760Hz), 还有一个间谐波($f=217\text{Hz}$)。这个样本间隔为 0.4ms , 样本数量 n 和脉冲响应函数(3) 的阶次 l 依靠信噪比的比率, 比率越低, 所需的样本数和阶次越大。对于方程(5), 较好的结果已给出, $n=150, l=70$ 。图 1 为方程(5) 的模拟波形。



(纵坐标表示振幅, $k_s = 40$)

图 1 方程(5) 的模拟波形

只考虑占优的奇异值和共轭值, 可近似估计模拟波形的谐波, 图 2 呈现了所获得的系统的幅频特性, 接近于零的点决定频率的确切值。为了作比较, 文中在同样的样本数量和样本间隔下用 FFT 算法重复了同样的实验。通过图 2 可以很清楚的看出, 对于基波为 40Hz , 谐波为 760Hz , 1000Hz , 间谐波为 217Hz 的波形, 通过三种方法检测, 结果如表 1, 而且 FFT 不能检测到间谐波, 而 CGD 可以较精确地检测到。

表 1 基于 FFT, CGD 和 SVD 三种方法所测得的模拟波形的谐波和间谐波

方法	40	217	760	1000	CPU (s)
FFT	44	failure	767	1006	0.17
CGD	41.5	215	759.5	1001	0.30
SVD	44	213	761.5	1001	0.48

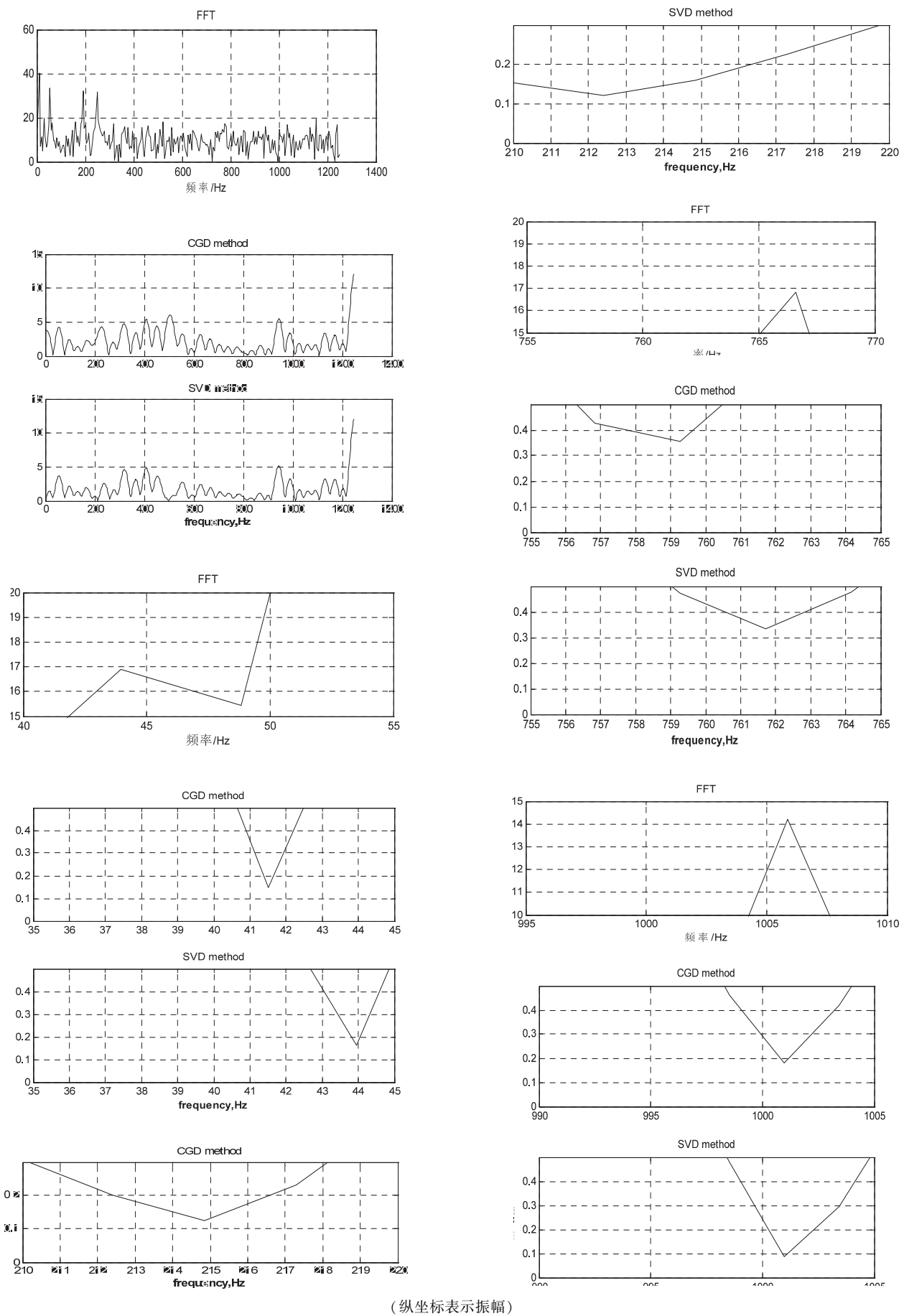


图2 用FFT,SVD和CGD三种方法所画的图1信号的滤波器模型 $H(Z)$ 的幅频特性曲线

结果表明,对于给定的模拟信号和频率电流转换器的实验,用同台同型号的电脑做 MATLAB 编程实现,基于 CGD 求解线性极小二乘问题来检测其谐波和间谐波的频率比基于 SVD 所用时间更短,比基于 FFT 精度更高。

4 结束语

文中提出一种基于共轭梯度分解算法来估计电力系统中的谐波问题,同时获得它还可以检测间谐波。和经典的 FFT 方法、近年来的 SVD 方法作比较,数值模拟实验表明共轭梯度分解算法具有较强的可行性和有效性,且在时间上有较大的优势。对于更进一步地提高检测谐波的精度和远程谐波的定位,降低工程计算的复杂度是下一步研究的问题。

参考文献:

- [1] Mattavelli P, Fellin L, Bordignon P, et al. Analysis of interharmonics in DC arc furnace installations [C]//Proceedings of 8th international conference on harmonics and quality of power. Athens, Greece: [s. n.], 1998:1092-1099.
- [2] Carbone R, Menniti D, Sorrentin O N, et al. Iterative harmonics and interharmonics analysis in multiconverter industrial systems [C]//Proceedings of 8th international conference on harmonic and quality of power. Athens, Greece: [s. n.], 1998:432-438.
- [3] Cichocki A, Lobos T. Artificial neural networks for realtime es-

timation of basic waveform of voltages and currents [J]. IEEE Trans. on Power Syst., 1994, 9(2):612-618.

- [4] Osowski S. Neural network for estimation of harmonics components in a power system [J]. IEE Proc. of Gener. Transm. Distrib., 1992, 139(2):129-135.
- [5] Lobos T, Rezmer J. Real-time determination of power system frequency [J]. IEEE Trans. on Instrum. Meas., 1991, 39(2):472-477.
- [6] Mori H, Itou K, Uematsu H, et al. An artificial neural-net based method for predicting power system voltage harmonics [J]. IEEE Trans. on Power Deliv., 1992, 7(1):402-409.
- [7] Girgis A, Chan G W B, Makram E B. A digital recursive measurement scheme for on-line tracking of power system harmonics [J]. IEEE Trans. on Power. Deliv., 1998, 6(3):1153-1160.
- [8] Oswski S. SVD technique for estimation of harmonic components; in a power system; a statistical approach [J]. IEE Proc. of Gener. Transm. Distrib., 1994, 141(5):473-479.
- [9] Lobos T, Kozina T, Koglin J H. Power system harmonics estimation using linear least squares method and SVD [J]. IEE Proc. of Gener. Transm. Distrib., 2001, 148(6):567-572.
- [10] Hestens M R, Stiefel E S. Methods of conjugate gradients for solving linear systems [J]. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1952, 49(6):409-436.
- [11] Yuan Y X. Computational Methods for Nonlinear Optimization [M]. Beijing: Science Press, 2008.
- [12] Wang L P, Yuan J Y. Conjugate Gradient Decomposition and Its Application [M]. [s. l.]: [s. n.], 2011.

(上接第 201 页)

服务保障、2010 年汛期气象服务工作、2010 年全国气象局长会议现场直播等重大气象服务保障中发挥了很大的作用,同时通过电子政务外网,为当地政府的相关部门提供准确的气象应急服务带来了一定的便利。

参考文献:

- [1] 王彬,宗翔,田浩.国家气象网络应用计算系统的设计 [C]//国家气象信息中心 2007 年度科技年会论文集. 北京:国家气象信息中心,2008:72-79.
- [2] 刘光,唐大仕. Web GIS 开发 [M]. 北京:清华大学出版社,2009.
- [3] Buyya R, Abramson D. Economic models for resource management and scheduling in grid computing [J]. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2002, 14(12):1507-1542.
- [4] Teodorovic D, Pavkovic G. A simulated annealing technique approach to the vehicle routing in the case of stochastic demand [J]. Transportation Planning and Technology, 1992(16):261-273.
- [5] 唐仰华,邝铿,陈往溪.基于 GSM 短信传输技术的气象

灾害应急预警系统建设 [J]. 广东气象, 2009, 29(4):50-52.

- [6] 章伟民,卢乾,刘俊旭. L 波段雷达发报程序的设计与应用 [J]. 广东气象, 2008, 30(S2):109-111.
- [7] Irwin D E, Grit L E, Chase J S. Balancing risk and reward in a market-based task service [C]//13th IEEE International Symposium on High Performance Distributed Computing. Honolulu: IEEE Computer Society, 2004:160-169.
- [8] Abramson D, Buyya R, Giddy J. A computational economy for grid computing and its implementation in the nimrod-G resource broker [J]. Future Generation Computer Systems Journal, 2002, 18(8):1061-1074.
- [9] Davenport T, Short J. The New Industrial Engineering: Information Technology and Business Process Redesign [M]. [s. l.]: BiblioBazaar, 1990.
- [10] 王玉荣. 流程管理 [M]. 第 2 版. 北京:机械工业出版社, 2007.
- [11] 李集明,沈文海,王国复. 气象信息共享平台及其关键技术研究 [J]. 应用气象学报, 2006(5):35-37.
- [12] 高梅,接连淑,张文华. 气象科研数据共享系统建设 [J]. 应用气象学报, 2004(4):24-26.

基于共轭梯度分解算法的电网谐波估计

作者: [蒲小丽](#), [王丽平](#)
作者单位: [南京航空航天大学 理学院, 江苏 南京 210016](#)
刊名: [计算机技术与发展](#)
英文刊名: [Computer Technology and Development](#)
年, 卷(期): 2013 (2)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201302054.aspx