

无回路网络最短路径的一种新算法

赵礼峰, 蒋腾飞

(南京邮电大学理学院, 江苏南京 210003)

摘要:对于求解小规模无回路网络的最短路径这一问题, 目前大多数算法都是基于 Dijkstra 算法或者穷举法的思想, 不仅计算量大而且操作复杂。文中在深入分析已有算法的基础上, 给出了一种新的简单易行的方法。该算法通过不断消去中间节点和弧以简化图的结构, 既能快速地计算出源点到目的节点的最短路径, 又能直观地找出最短路。最后算法通过具体实例分析表明, 该算法不仅思想简便、易于操作, 同时有效地降低了算法复杂度, 是计算小规模无回路网络的一种行之有效的算法。

关键词:最短路; 无回路网络; 有效算法; 双向弧

中图分类号: TP311

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2013)02-0105-03

doi:10.3969/j.issn.1673-2013.02.026

A New Algorithm for Shortest Path in DAG

ZHAO Li-feng, JIANG Teng-fei

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: For solving the shortest path on DAG, most of algorithms are based on Dijkstra algorithm or brute-force method, it's not only computationally expensive and complicated to operate. Based on the existing shortest path algorithm, propose a new simple method. The algorithm continuously deletes intermediate nodes and arcs to simplify the structure, not only can quickly calculate the shortest path from the source node to the destination node, but also find shortest paths easily. Finally algorithm through the concrete example analysis shows that, this algorithm is easy to operate, and at the same time, effective to reduce the algorithm complexity. It is a feasible algorithm of calculating loop-free network.

Key words: shortest path; directed acyclic graph (DAG); effective algorithm; bi-directional arc

0 引言

最短路径问题是图论研究中的一个经典算法问题, 旨在寻找图(由顶点和路径组成的)中两顶点之间的最短路径。最短路径通常归为三类^[1]:

第一, 单源最短路径问题: 包括确定源点的最短路径问题与确定汇点的最短路径问题;

第二, 确定源点和汇点的最短路径问题: 即已知源点和汇点, 求两顶点之间的最短路径;

第三, 全局最短路径问题: 求图中所有顶点间的最短路径。

文中探讨的是上述的第二种, 确定源点和汇点的最短路径问题。对于此类最短路问题, 目前最常用的最短路径算法有: Dijkstra 算法、A* 算法、Floyd-Warshall 算法、Johnson 算法和 Bi-Direction BFS 算法^[2-4]。但这些算法操作性复杂, 计算量庞大。文中

利用小规模无回路网络其本身特殊的性质, 在已有算法的基础上, 介绍一种求两点之间最短路的新方法, 该算法不仅计算量小, 操作性强, 直观明了, 而且适合于任意赋权的无回路网络。

1 问题分析

1.1 基本概念

定义1 赋权图 如果有向图 D 中, 所有的弧均赋有权值(权值可代表实际距离, 行车时间, 交通费用等), 则称图 D 为赋权图^[5]。

定义2 回路 如果有向图 D 中, 含有一条起点和终点相同的路, 则称为图 D 的一条回路。

定义3 无回路网络 如果有向图 D 中, 不含任何一条回路, 则称图 D 为无回路网络。

定义4 最短路 在赋权图 D 中给定两顶点, 此两顶点间的所有路径中, 权值最小的路径称为两顶点的最短路。

1.2 问题描述

最短路问题一般描述如下: 给定一个无回路的有向赋权网络 D, 任意取 D 中的两个顶点, 找出在这两顶

收稿日期: 2012-06-06; 修回日期: 2012-09-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61070234, 61071167)

作者简介: 赵礼峰(1959-), 男, 教授, 研究领域为图论及其应用、矩阵论; 蒋腾飞(1986-), 男, 硕士研究生, 研究方向为图论及其应用。

点间的所有路径,并计算出每条路径的权值之和,其中权值最小的路径即为所求的此两顶点间的最短路。目前对于如何求取最短路径,已经提出很多经典算法^[6-11],如 Dijkstra 算法、A* 算法、Ford 算法、Folyd 算法等,此处不再详细介绍。下面在已有算法的基础上,针对小规模无回路网络,给出求最短路径的一种新方法。

1.3 问题分析

规则 1 消点。

在这里考虑的是将要消去的顶点连接三条弧的消点规则,以此类推,顶点连接 $n(n > 3)$ 条弧的情况类似,弧旁的数字表示路径值,下面主要分三种情况:

第一种情况:所消顶点的入度为 1(即顶点 v_4 ,有一条入弧,两条出弧)时,消点过程如图 1(a)所示,得到两条新弧 $v_1 \rightarrow v_2$, $v_1 \rightarrow v_3$,同时在新弧标上新的长度 $x+y$ 和 $x+z$ 。

第二种情况:所消顶点的入度为 2(即顶点 v_4 ,有两条入弧,一条出弧)时,消点过程如图 1(b)所示,得到两条新弧 $v_1 \rightarrow v_3$, $v_2 \rightarrow v_3$,同时在新弧标上新的长度 $x+z$ 和 $y+z$ 。

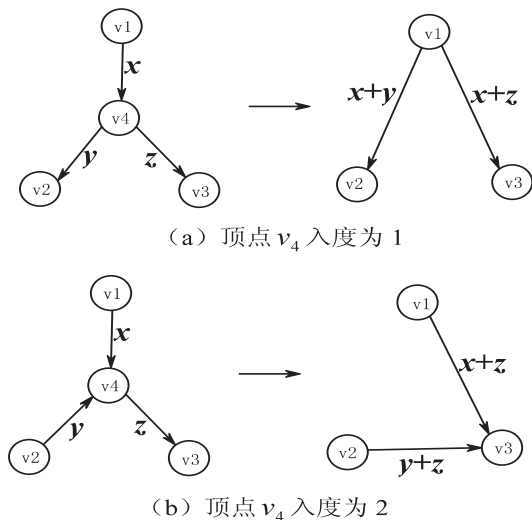


图 1 消点过程

第三种情况:所消顶点入度为 0 或者 3(即顶点 v_4 ,有三条入弧或者三条出弧)时,此两种情况只有出弧或只有入弧,即将消的顶点相当于源点和汇点,因为研究的是单源单汇网络,而消去的顶点是除了源点和汇点之外的顶点,所以这两种情况不予考虑。再者,即使出现,也不会产生新的弧。

规则 2 消弧。

在规则 1 的消点过程中,可能会产生新弧,这样就会导致两点之间出现重弧(从一顶点到另一顶点间出现两条弧),这时就要做出处理,出现重弧的情况分如下两种:

第一种情况:两个端点间出现方向相同的两条弧

(设弧长分别为 x 和 y),若弧长 x 和弧长 y 不相等,则取其中较小值;若 x 和 y 相等,两边都保留,并在新弧作上标记,如 $w(e123)$ 。

第二种情况:两个端点间出现方向相反的两条弧,因为研究的是无回路网络,所以消点后这种情况不会出现,即不予考虑此种情况。

2 新算法思想及步骤

2.1 算法思想

文中的算法思想旨在通过标号法更方便容易得到最短路径及其权值。首先在图中任意找出一个除源点汇点之外的顶点(因为本算法是通过消点消边的规则求源点到汇点间的最短路径,故只需消去中间的顶点),按照上文列出的规则 1 消去该顶点,在消点的过程中必然会产生一些新弧,在新弧上标记得到的新的长度以及新的路径(如 $w(e123)$,表示路径 $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$,且权值和为 w),然后按规则 2 跟原来的弧进行比较判断,消去多余的重弧,这样依次进行下去,直到消去除源点汇点之外的所有顶点,算法结束,此时根据标号即可得到最短路径及其权值。

2.2 算法步骤

Step 1 令 $R = \{v_i | i \neq s, t\}$,取 $v_i \in R$,按上述规则 1 进行消点,同时令 $R := R \setminus \{V_i\}$;

Step 2 对多个具有相同端点的弧进行消弧,若

- 1° 新弧权值 < 原弧权值,则消去原弧
- 2° 新弧权值 = 原弧权值,则保留不变
- 3° 新弧权值 > 原弧权值,则消去新弧

若出现 1° 和 2° 情况,则在新弧上作标号(标号如下: $w(e123)$,表示路径 $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$,且权值和为 w),转 Step 3;

Step 3 若 $R = \emptyset$,则结束;否则,转 Step 1,继续消点。

2.3 算法的复杂度

设容量网络的顶点数为 n ,弧数为 m 。算法最多消去 $n-2$ 个顶点(除去源点汇点),在消点过程中,产生新弧网络的总弧数必然不多于原网络的总弧数 m (如图 1(a)和图 1(b)所示,消去顶点 v_4 后,原来四条弧变为现在的两条弧,即新产生的网络的弧数比原网络的弧数少),同样,消去第二个点的过程中,为产生新网络的总弧数也不会大于 m 条,依次进行下去,直到消完 $n-2$ 个顶点,故算法共比较的次数不会超过 $m(n-2)$ 次,所以算法复杂度 $O(mn)$ 。

2.4 算法的可行性分析

算法第一个步骤是寻找赋权网络的顶点集合 R (除源点汇点的集合,共有 $n-2$ 个顶点),按照上文中 1.3 的规则进行消点,因为消去的顶点非源点汇点,

所以每次消点过程中必然会产生新弧,此时在集合 R 中去掉消去的顶点;之后到达算法的第二个步骤,因为是无回路网络,所以不会产生双向弧,然后对产生的新弧与原弧进行比较判断,消去多余的重弧,对未消去的新弧作上标号处理;算法的第三个步骤对集合 R 作结束判断,若 R 为空,则结束,否则继续消去集合 R 中的顶点,所以三个步骤可以依次进行下去,而且集合 R 为有限集,算法也必然会在有限步后终止,不会出现死循环。所以,算法是可行的,也是正确的。

3 应用实例

计算图 2 中 v_1 到 v_7 的最短路径。

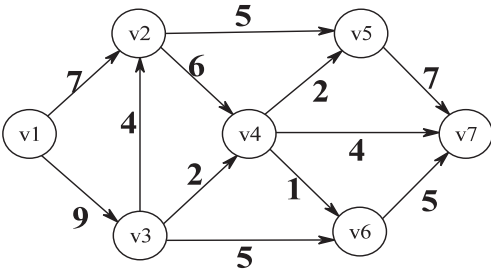


图 2 单源单汇有向网络图

第一步:令集合 $R = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,任意取 R 中的顶点 v_3 ,消去此点,产生新弧 $v_1 \rightarrow v_2, v_1 \rightarrow v_4, v_1 \rightarrow v_6$,作上标号,如图 3(a);

第二步:此时 $R = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$,消去权值为 13 的弧 $v_1 \rightarrow v_2$,新弧 $v_1 \rightarrow v_4, v_1 \rightarrow v_6$ 保留,同时消点 v_2 ,如图 3(b);

第三步:此时 $R = \{v_4, v_5, v_6\}$,产生新弧 $v_1 \rightarrow v_5, v_1 \rightarrow v_4$,消去权值 13 的弧 $v_1 \rightarrow v_4$,同时消去 v_5 ,如图 3(c);

第四步:此时 $R = \{v_4, v_6\}$,产生新弧 $v_1 \rightarrow v_7, v_4 \rightarrow v_7$,消去权值为 9 的弧 $v_4 \rightarrow v_7$,同时消去 v_6 ,如图 3(d);

第五步:此时 $R = \{v_4\}$,产生新弧 $v_1 \rightarrow v_7, v_4 \rightarrow v_7$,消去权值为 6 的弧 $v_4 \rightarrow v_7$,两条弧 $v_1 \rightarrow v_7$ 权值均为 19,保留不变,同时消去 v_4 ,如图 3(e);

第六步:消去重弧,得到图 3(f)。
此时 R 为空集,算法结束,得到最短路径为 $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_7$,且最短路长为 15。

4 结束语

最短路径问题是重要的最优化问题之一,可以直接应用于生产生活的很多方面,如线路选择、网络铺设、石油运输等问题^[12]。文中针对小规模无回路网络,在已有算法的基础上,通过标号法,不断消点消弧,简化图的结构,不仅方便地得到最短路径及其权值,同时有效地提高了算法的效率。最后通过具体实例验证了该方法的性能与实用性,相对于以往算法应用前景

更加广阔。

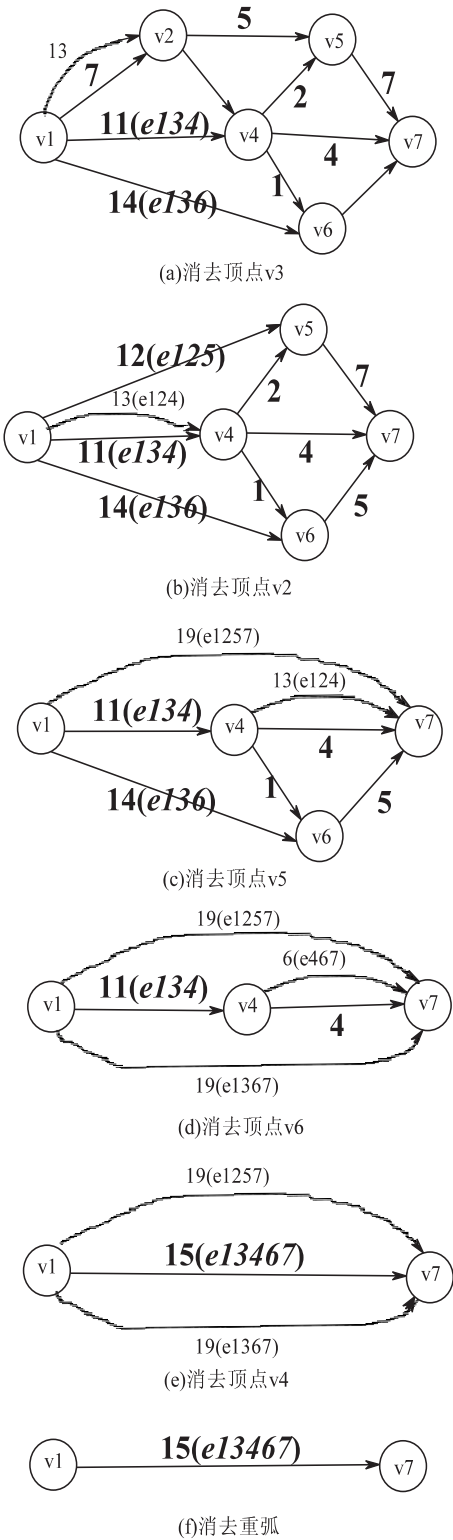


图 3 a~f 为消去顶点 v_2 到 v_6

参考文献:
[1] 谢 政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2003.
[2] 赵礼峰,陈 华,宋常城,等. 求解网络最大流的筛选算法[J]. 模糊系统与数学,2010,24:157-162.

中断。

```
user@ MX960A# set graceful-switchover
user@ MX960A# set nonstop-routing
user@ MX960B# set graceful-switchover
user@ MX960B# set nonstop-routing
(5)配置 VC 端口。
```

在 MX 系列虚拟机箱的成员路由器互连,你必须使用虚拟机箱 VC 端口 set 命令请求接口上配置虚拟机箱端口。

```
(6)查看 VC 配置。
user@ MX960A> show virtual-chassis status
可以检查 VC 已经在两台 MX960 上配置成功。
```

3 结束语

校园网宽带接入设备作为宽带接入网的骨干网之间的桥梁,利用宽带接入设备具有的这种虚拟机箱独特功能,只需要管理一台逻辑上的核心设备,不存在交换环路,可以使核心网络架构清晰,简化了冗余协议的繁杂规划设计,减少了网络设备的维护工作。虚拟机箱具有高收敛性,消除了核心设备单点故障,实现负载分担以及热备份,确保核心设备的统一管理和特定服务的区隔、安全性和管理性,同时实现了虚拟化所带来的高效率和节省成本的优点。

参考文献:

[1] 罗恩韬. 基于以太网层 PPPoE 协议流程分析与研究[J]. 湖南科技学院学报,2008,29(8):85-88.

(上接第 107 页)

[3] Ebrahim R M,Razmi J. A hybrid meta heuristic algorithm for bi-objective minimum cost flow (BMCF) problem[J]. Advances in Engineering Software,2009,40(10):1056-1062.

[4] 王苏男,宋伟,姜文生. 最短路径算法的比较[J]. 系统工程与电子技术,1994,16(5):43-49.

[5] 张先迪,李正良. 图论及其应用[M]. 北京:高等教育出版社,2005.

[6] 邹豪思,王远志. 网络最大流的矩阵算法[J]. 内蒙古大学学报,2001,32(4):466-469.

[7] Torrieri D. Algorithms for finding an optimal set of short disjoint paths in a communication network[J]. IEEE Transactions on Communications,1992,40(11):1698-1702.

[2] RFC2516. A Method for Transmitting PPPOverEthernet (PPPoE)[S]. [s.l.]:Network Working Group,1999.

[3] 汤鹏杰,李奇润,唐凤仙. 基于 PPPoE 的带宽汇聚 NAT 设计与实现[J]. 计算机技术与发展,2011,21(10):95-98.

[4] Understanding Redundant Trunk Links on EX-series Switches [EB/OL]. 2009. http://www.juniper.net/techpubs/en_US/junos9.5/topics/concept/cfm-redundant-trunk-groups-understanding.html.

[5] 徐雅斌,张晓宇,崔杰. 园区骨干网的可靠性设计[J]. 辽宁工学院学报,2003,23(4):12-15.

[6] 张玉峰,孙知信. 基于热备份的主备倒换在高端路由器中的应用[J]. 计算机技术与发展,2010,20(3):172-175.

[7] 刘爱军,耿国华. 基于 x86 的虚拟机技术现状应用及展望[J]. 计算机技术与发展,2007,17(11):250-253.

[8] Virtual Switching System (VSS) [EB/OL]. 2012. http://www.cisco.com/en/US/prod/collateral/switches/ps5718/ps9336/prod_qas0900aecd806ed74b.html.

[9] Virtual Chassis OverView [EB/OL]. 2010. http://www.juniper.net/techpubs/en_US/junos10.3/topics/concept/virtual-chassis-overview.html.

[10] 项明. 网络虚拟化 IRF2 技术架构 [EB/OL]. 2012. http://www.h3c.com.cn/about_h3c/company_publication/ip_llh/2009/six/home/catalog/200910/650694_30008_0.htm.

[11] Brocade VCS Fabric Technology [EB/OL]. 2012. <http://www.brocade.com/solutions-technology/technology/vcs-technology/overview.page>.

[12] Virtual Chassis Components Overview [EB/OL]. 2012. http://www.juniper.net/techpubs/en_US/junos/topics/concept/virtual-chassis-mx-series-components.html.

[8] 赵建宏,杨建宇,雷维礼. 一种新的最短路径算法[J]. 电子科技大学学报,2005,34(6):778-781.

[9] 张毅,张猛,梁艳春. 改进的最短路径算法在多点路由上的应用[J]. 计算机科学,2009,36(8):205-207.

[10] Hougardy S. The Floyd-warshall algorithm on graphs with negative cycles[J]. Information Processing Letters, 2010, 110: 279-281.

[11] 张小军. 最短路问题的改进算法[J]. 计算机工程与设计, 2009,30(16):3762-3764.

[12] 施光燕,董加礼. 最优化方法[M]. 北京:高等教育出版社,1999.

无回路网络最短路径的一种新算法

作者: [赵礼峰, 蒋腾飞](#)
作者单位: [南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210003](#)
刊名: [计算机技术与发展](#)
英文刊名: [Computer Technology and Development](#)
年, 卷(期): 2013(2)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201302028.aspx