

基于深度优先的一种网络最大流求解法

赵礼峰, 孟晓婉

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210046)

摘要:网络最大流问题在工程和科学领域应用广泛,许多线性规划的实际问题都可转化为网络最大流的模型来求解,开辟了图论应用的新途径。为了解决现有的求解网络最大流算法存在的步骤繁复、计算量大、由于增广链选取的顺序不当而无法得到理想的最大流等问题,文中在原有算法的基础上作了一些改进,应用图的深度优先搜索原理,提出一种新的求解最大流问题的算法。该算法可以简单快速地找到增广链,提高了算法效率和可控性,易于实现,且避免了标号过程,只需要在一个图上即可完成,整个运算过程直观性强,计算方便。

关键词:最大流;增广链;增广链算法;深度优先搜索

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2012)10-0161-04

An Algorithm for Solving Maximum Flow Based on Depth First Search

ZHAO Li-feng, MENG Xiao-wan

(College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Posts and Telecommunications,
Nanjing 210046, China)

Abstract: The network of maximum flow is widely applied in engineering and science, a lot of the actual linear programming problem can be converted into the network of the maximum flow model to solve, opened up a new way of the application of graph theory. There are lots of steps and complicated calculation in the existing algorithm for solving the maximum networks flow, and because of improper selection order of augmented path, can not obtain the ideal maximum flow. In order to solve these problems in existing algorithm, it does some improvement of the existing algorithms, then puts forward a new algorithm for solving the maximum flow problem which makes use of depth first search theory. This algorithm can find the augmented path easily and quickly, and avoid the labeling process, the entire operation process only needs drawing a diagram to be completed, it is improving the efficiency and controllable of the algorithm and easy to realize. It is strong intuitive and convenient to calculate.

Key words: maximum flow; augmenting path; augmenting path algorithm; depth first search

1 问题的分析与提出

网络流理论是图论中极其重要的分支,它不仅提供了图论中十多个著名结果的新证明,而且应用广泛,比如,运输问题、分派问题、通信问题等均可转化为网络流来解决。在既定网络中,人们可以通过网络的最大流量以及网络中各条边的流量来判断设备的利用程度,因此,研究网络的实际最大通过能力即网络的最大流量问题是十分必要的。

网络最大流问题自被提出以来的 50 多年中已有丰富的结果,建立了较为完善的理论体系,并设计了一系列求最大流的算法^[1~11]。其中最经典的算法是

Ford-Fulkerson 在 1956 年提出的标号算法^[1]。该算法分为标号过程和增广过程,每次在所有增广链中随机地找一条进行增广。后来, Dinic (1970), Edmonds-Karp (1972) 提出了最短增广链算法^[2],其主要思想是每次都沿着最短的增广链进行增广,这样排除了选取增广链的任意性。

近年来许多学者又提出了改进的算法^[3~7],譬如一般的预流推进算法^[1]是通过给出“预流”的概念并以此为基础提出的算法;文献[3]中的“消链”算法^[3]是基于 Ford-Fulkerson 算法引入极大一致链的概念提出的一种算法,避免了标号算法的标号过程;文献[4]是基于 Ford-Fulkerson 算法受阻塞网络中容差概念的启发,对顶点容差进行判定,优先选取容差为正的顶点加入增广链中,从而提出的一种“容差修正网络最大流 2F”算法。此外还有冲塞式算法^[5]和回路调整算法^[7]等等。

收稿日期:2012-02-10;修回日期:2012-05-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61070234,61071167)

作者简介:赵礼峰(1959-),男,安徽淮北人,教授,硕士研究生导师,研究方向为图论及其应用。

但是这些算法要么复杂度较高,要么稳定性不够理想,具有很大的局限性。如 Ford-Fulkerson 算法每次选取增广链时具有任意性,会使计算量变大;Dinic 算法在计算过程中必须先计算出剩余网络才能进行增广,步骤比较繁琐。此外,还有许多改进的算法,如 Edmonds-Karp 算法,“消链”算法,这些算法如果同时存在长度相同的两条增广链,先选择不同增广链就有可能得到不同的结果,甚至得不出正确的结果。

基于上述分析,文中主要是应用图的深度优先搜索原理,针对增广链算法进行讨论,对最大流问题的算法做出一些改进,以使改进后的方法更简单易懂,更易使用,在保持算法高效性的同时提高算法的直观性并增加其稳定性。

2 问题描述

2.1 基本概念

下面是文中所使用到的术语:

定义 1 最大流问题就是在一个带源点和汇点的容量网络上求一个流值最大的可行流,这样的可行流称为最大流。

定义 2 若给一个可行流 $f = \{f_{ij}\}$, 把网络中使 $f_{ij} = c_{ij}$ 的弧称为饱和弧,使 $f_{ij} < c_{ij}$ 的弧称为非饱和弧。把 $f_{ij} = 0$ 的弧称为零流弧。

定义 3

1、对网络 G 中的任意一个节点 V , 若在某一条固定的增广链 u 上, 节点 V 的入弧是非饱和弧且出弧是饱和弧, 则称 V 为盈余点。

2、若该盈余点 V 还满足: (1) 该增广链 u 上的第一条弧未饱和; (2) V 前面没有其他的盈余点; (3) 以 V 为发点存在到汇点 v_t 的路径, 则称 V 为准盈余点。

定理 1 v_s 到 v_t 的可增广链经过一次增广后:

(1) 若增广链上不存在盈余点, 则沿此增广链上第一条弧不存在其他的 v_s 到 v_t 的可增广链;

(2) 若该增广链上存在盈余点但不存在准盈余点, 则不存在经过此增广链上的第一条弧且经过盈余点的到 v_t 的可增广链。

证明:

(1) 显然成立。

(2) 用反证法。假设增广链上存在一个盈余点 V , 并沿此增广链上第一条弧存在经过盈余点 V 到 v_t 的可增广链, 则显然该增广链上的第一条弧未饱和; 且以该增广链上点 V 为发点存在到汇点 v_t 的路径; 同时还知道盈余点 V 前面没有其他的盈余点, 因为假如前面有盈余点则出弧是饱和弧, 与假设矛盾。此时满足准盈余点的定义, 则 V 是准盈余点, 与题设矛盾, 故得证。

此定理是文中算法在搜索增广链时的重要依据。

2.2 算法描述

2.2.1 算法思想

文中在现有算法的基础上应用图的深度优先搜索原理, 对增广链的选取过程进行了一些改进, 提出一种新的求解最大流问题的算法。

首先以源点 v_s 为发点, 沿剩余流量最大的出弧寻找一条从 v_s 到 v_t 的最短可增广链 u (即经过中间点最少的路径) 进行增广, 然后沿着这条增广链 u 反向追踪, 依次寻找准盈余点, 若存在准盈余点, 则以该准盈余点为发点, 继续寻找到 v_t 的最短可增广链进行增广, 确保每次增流至少使一条弧饱和, 并且将已经达到饱和的弧划去, 否则仍以源点 v_s 为起点沿此时剩余流量最大的弧寻找到 v_t 的最短可增广链, 重复上述步骤, 直到不存在从源点 v_s 到汇点 v_t 的路径时, 就得到了一个最大流。此时, 仅以源点 v_s 为一个割集, 其割量最小, 即为最大流的值。

其次, 为了寻找最短增广链, 把容量网络中的所有顶点进行分层, 具体方法参见文献[1]。在求解最大流的过程中将可增容量直接标记到对应的弧上, 当一条弧达到饱和时, 就在所在的弧上画一个“||”作为终止符, 表示该弧将终止增流。这样就省去了标号过程, 整个运算过程可以在一个网络图上完成^[12]。

算法的主要思想就是应用图的深度优先搜索原理, 沿着发点的每一条弧依次找到含有此弧的所有增广链进行增广, 优先选择可增广容量大的且路径最短的可行流进行增广, 并且将已经达到饱和的弧用终止符“||”划去, 直至不再存在可增广链时结束。

2.2.2 算法步骤

求网络 $G = (V, A, c)$ 中的最大流 f :

Step1: 初始化网络图, 各节点间流量置 0;

Step2: 从发点 v_s 出发, 判断是否存在一条到 v_t 的可增广链, 若存在转 Step3, 否则转 Step7;

Step3: 以源点 v_s 为发点, 沿剩余流量最大的出弧找一条从起点 v_s 到 v_t 的最短可增广链 u (即经过中间顶点最少的路径), 在选相同层次的路径时优先选择可增广的流量最大的增广链, 若存在转 Step4; 否则从次大流量的第一条弧开始寻找;

Step4: 调整, 求出该链上各弧容量的最小值 δ , 并将此增广链中对应弧的流量后面相应地标上 δ , 其中:

$$\delta = \min \{c_{ij} - f_{ij}\}$$

保证每次增广至少使一条弧饱和, 并且在饱和弧上画上“||”, 增广后转 Step5;

Step5: 以汇点 v_t 为发点, 沿原增广链返回, 反向追踪, 依次检查路上的每个节点; 若存在准盈余点 v , 则转 Step6; 否则转 Step2;

Step6:原增广链 u 中 $v_s - v$ 不变,以准盈余点 v 为出发点,沿该点选择到 v_t 的最短路径,即此时增广链为 $v_s - v - v_t$ (在选取相同层次的路径时选择可增广的流量最大的增广链)进行增广,转 Step4;

Step7:计算所有以源点 v_s 为发点的边的流量和,得到最大流。算法结束。

2.3 应用实例

例:求图 1 的网络最大流。

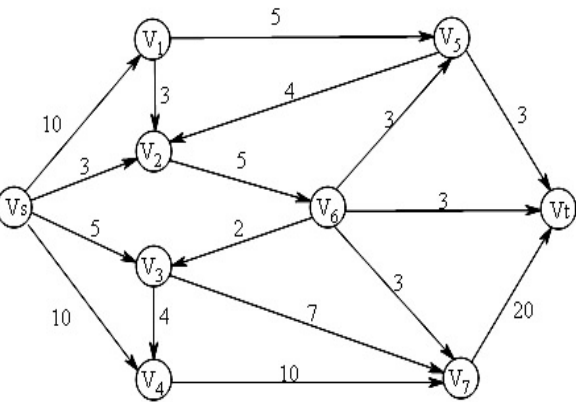


图 1 原网络图

解:(1)首先从 v_s 出发,沿一条剩余流量最大的弧找最短可增广链,找到可增广链 $u_1: v_s - v_4 - v_7 - v_t, \delta_1 = 10$ 。由此得出弧 $(v_s, v_4)(v_4, v_7)$ 饱和,因此在 (v_s, v_4) 和 (v_4, v_7) 上画上终止符“||”,如图 2 所示。

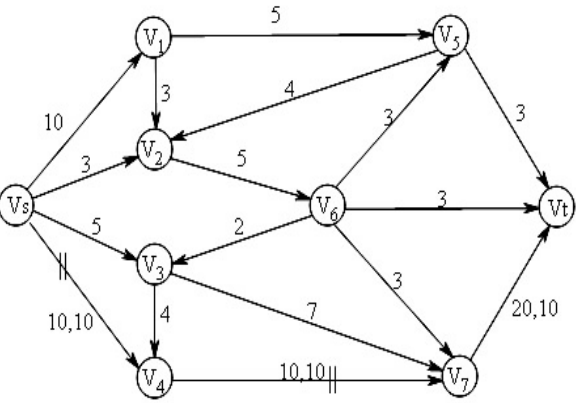


图 2 选取增广链 u_1 并进行增广

(2)沿着 u_1 反向追踪,依次检查链上的点 v_7, v_4 , 不存在准盈余点,再从 v_s 出发,沿剩余流量最大的弧找最短可增广链,得可增广链 $u_2: v_s - v_1 - v_5 - v_t$, 其中 $\delta_2 = 3$ 。由此得弧 (v_s, v_1) 饱和,所以在 (v_s, v_1) 上画上终止符“||”,如图 3 所示。

再沿此链反向追踪,依次检查点 v_5 和 v_1 ,可知 v_5 是第一个准盈余点,以 v_5 为发点找到汇点的最短路径,得可增广链 $u_3: v_s - v_1 - v_5 - v_2 - v_6 - v_t$, 其中 $\delta_3 = 2$, 由此得弧 (v_1, v_5) 饱和,所以在 (v_1, v_5) 上画上终止符“||”,如图 4 所示。

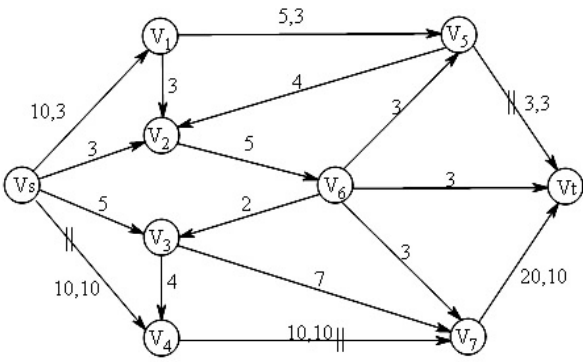


图 3 选取增广链 u_2 并进行增广

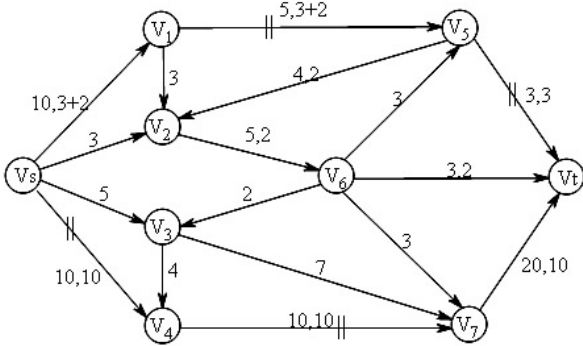


图 4 选增广链 u_3 并进行增广

同理, v_1 是准盈余点,找到可增广链 $u_4: v_s - v_1 - v_2 - v_6 - v_7 - v_t$, 其中 $\delta_4 = 3$ 。由此得弧 $(v_1, v_2), (v_2, v_6), (v_6, v_7)$ 饱和,因此在 $(v_1, v_2), (v_2, v_6), (v_6, v_7)$ 上画上终止符“||”,如图 5 所示。此时已追踪至 v_s , 不存在准盈余点。

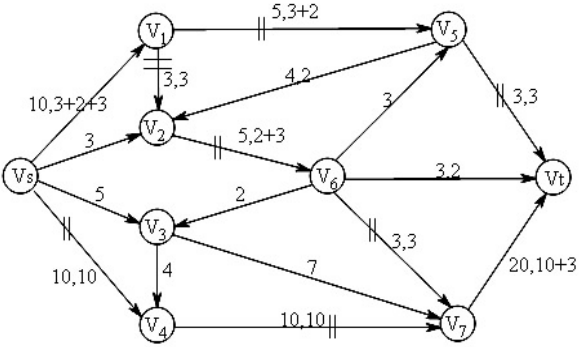


图 5 选取增广链 u_4 并进行增广

再以 v_s 为发点重复上述步骤,即可完成整个算法,最终得到最大流,如图 6 所示。

最后计算以源点 v_s 为发点的边的流量和 $\sum_i (f_{si})$, 得到最大流 $f_{\max} = 10+5+8=23$ 。

注:用此算法求解时可以直接在一个图上完成整个增流过程,如用图 6 就可标出整个运算过程。而如果用 Ford-Fulkerson 算法则需要通过 12 条增广链才能完成增广过程得到最大流 23,步骤繁多且不易操作,这里就不详细给出。

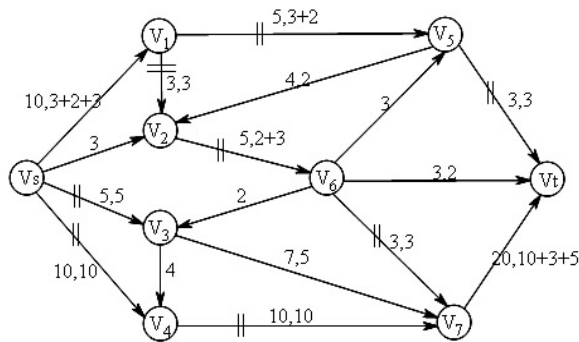


图 6 最后的网络图

3 结束语

文中针对目前算法存在的步骤繁复、计算量大的问题拟对最大流问题的算法作出一些简化处理,以使改进后的方法更简单易用。文中是利用深度优先搜索及分层网络的方法,在选择增广链的时候做了一些改进,不易漏掉增广链,而且节省计算时间,加快了整个算法的执行速度,同时避免了多次对网络的标号过程,把复杂的网络简单化,计算方便,直观性强,并且最后通过具体的算例验证了算法的实用性和高效性。

参考文献:

[1] 谢政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙:国防科技大学

出版社,2003:116-123.

- [2] 张先迪,李正良. 图论及其应用[M]. 北京:高等教育出版社,2005:244-253.
- [3] 王志强,孙小军. 网络最大流的新算法[J]. 计算机工程与设计,2009,30(10):2357-2359.
- [4] 陈静,单锐. 容差修正网络最大流 2F 算法[J]. 长春工业大学学报,2008,29(6):713-716.
- [5] 纪伟,戴理昱,王永红. 网络最大流的“冲塞式”求法[J]. 运筹与管理,2003,12(3):38-42.
- [6] 罗会兰. 网络最大流算法的改进[J]. 邵阳高专学报,1996,9(3):201-203.
- [7] 韩明亮. 求解最小费用最大流问题的一种方法[J]. 中国民航学院学报,2000,18(1):49-53.
- [8] Dinic E. A Labeling Algorithm for the Earliest and Latest Time-varying Maximum Flow Problems[J]. Soviet. Math Doklady, 1970,11(8):1277-1280.
- [9] 张宪超,江贺. 一个新的最大流问题增载轨算法[J]. 小型微型计算机系统,2006,27(9):1726-1730.
- [10] Martens M, Skutella M. Flows on few paths: algorithms and lower bounds[J]. Networks, 2006,48(2):68-76.
- [11] Martens M, Skutella M. Flows with unit path capacities and related packing and covering problems[J]. J. Comb Optim, 2009,18(3):272-293.
- [12] 赵礼峰,陈华,宋常城,等. 基于一个网络图最大流算法的改进[J]. 计算机技术与发展,2010,20(12):162-165.

(上接第 160 页)

调度算法,该算法将网格节点映射到 Chord 环中,并将二维协调空间的中心控制节点映射到 Chord 环中,从而为资源申请和资源票找到负责管理该对象的网格节点,网格节点通过调度算法找到合适的资源进行调度。该算法可以有效地防止资源访问冲突,并且系统是在完全的分布式环境下完成资源的调度,有效地提升系统的可扩展性。

参考文献:

- [1] Deelman E, Blythe J, Gil Y, et al. Mapping abstract complex workflow onto grid environments[J]. Journal of Grid Computing, 2003,1(1):25-39.
- [2] 蒋哲远,韩江洪,王创. 动态的 QoS 感知 Web 服务选择和组合优化模型[J]. 计算机学报,2009,32(5):1014-1025.
- [3] 王勇,胡春明,杜宗霞. 服务质量感知的网格工作流调度[J]. 软件学报,2006,17(11):2341-2351.
- [4] 王勇. 网格工作流中转移概率的计算方法研究[J]. 计算机工程与应用,2007,43(21):18-20.
- [5] 李玺,胡志刚,胡周君,等. 基于截止时间满意度的网格工作流调度算法[J]. 计算机研究与发展,2011,48(5):877-884.

- [6] 苑迎春,李小平,王茜. 基于逆向分层的网格工作流调度算法[J]. 计算机学报,2008,31(2):282-291.
- [7] 张伟,秦臻,苑迎春. 网格环境下工作流的费用、时间调度算法[J]. 计算机工程,2006,32(16):97-99.
- [8] Hakem M, Butelle F. Dynamic critical path scheduling parallel programs onto multiprocessors [C]//Proc of the 19th IEEE Int Parallel and Distributed Processing Symp (IPDPS'05). Los Alamitos, CA:IEEE Computer Society, 2005.
- [9] Wiczeorek M, Podlipnig S, Prodan R, et al. Bi-criteria scheduling of scientific workflows for the grid[C]//Proc of the 8th IEEE Int Symp on Cluster Computing and the Grid (CCGrid'08). Los Alamitos, CA:IEEE Computer Society, 2008:9-16.
- [10] Jia Yu, Rajkumar B. A taxonomy of workflow management systems for grid computing[J]. Journal of Grid Computing, 2005,3(3):171-200.
- [11] Fitzgerald S, Foster I, Kesselman C, et al. A directory service for configuring high-performance distributed computations [C]//Proceedings of 6th IEEE Symposium on High Performance Distributed Computing. Portland, USA: [s. n.], 1997.
- [12] Ranjan R, Rahman M, Buyya R. A Decentralized and Cooperative Workflow Scheduling Algorithm[C]//Proceedings of 8th IEEE International Symposium on Cluster Computing and the Grid. [s. l.]: [s. n.], 2008.

基于深度优先的一种网络最大流求解法

作者: [赵礼峰, 孟晓婉](#)
作者单位: [南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210046](#)
刊名: [计算机技术与发展](#)
英文刊名: [Computer Technology and Development](#)
年, 卷(期): 2012(10)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201210042.aspx