

新的求解二维浅水方程的高分辨率有限体积法

吴红侠^{1,2}, 汪继文^{1,2}

(1. 安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039;
2. 安徽大学 计算机科学与技术学院, 安徽 合肥 230039)

摘要:随着海洋开发、灾害预防等方面的发展,浅水方程的求解越来越受到人们的重视。文中在文献[1]的基础上提出一种新的求解二维浅水方程的有限体积格式,并将文献[2]中给出的新型可微限制器函数运用到上述有限体积法求解二维浅水波问题的过程当中,建立新的可求解二维浅水方程的新的高分辨率有限体积法。文中提出的方法由预估阶段和校正阶段组成,该方法是在非结构化三角网格中实现的。运用这种方法模拟超临界流斜水跃现象,数值试验结果显示所提出的有限体积法具有很好的非震荡性。

关键词:浅水方程;有限体积法;限制器函数

中图分类号:TP399

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2012)10-0055-04

A New High-resolution Finite Volume Method for Solving Shallow Water Equations

WU Hong-xia^{1,2}, WANG Ji-wen^{1,2}

(1. Key Lab. of Intelligent Computing & Signal Processing, Anhui University, Hefei 230039, China;
2. Science and Technology School, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: With the development of ocean development, disaster prevention and other aspects, solving shallow water equation is paid more attention. In this paper, made an improvement for a new finite volume method (FVM) in the numerical solution of shallow water equations based on document [1], and applied the new limiter in document [2] to above FVM to solve the shallow water problem, present a new high-resolution finite volume method. The proposed approach consists of a predicting stage and a correcting stage. The proposed method is implemented on unstructured meshes. It combines the new FVM to simulate supercritical flow oblique hydraulic jump problem, numerical results show that the proposed finite volume method is well non-oscillatory.

Key words: shallow water equations; finite volume method; slope limiters

0 引言

随着计算机技术的快速发展,浅水流动模拟被广泛应用到湖泊、河道、河口以及海洋水流的计算当中。浅水方程是各种各样的浅水环境流体运动的数学描述。随着海洋开发、灾害预防 and 环境保护等方面的发展,浅水方程的求解越来越受到人们的重视,已经成为国内外计算数学、计算流体力学的研究热点。

在对河道、河口等实际的水流进行二维流场模拟时,通常由于地形、计算域非常复杂而给数值模拟带来了很大的困难。为了克服这些困难,很多计算流体力学的学者们提出多种解决方法,如采用贴体坐标^[1]、

非结构化网格^[2,3]等。

针对复杂的计算域和地形,文中在前人的基础上采用非结构化网格的有限体积法。采用文献[4]中提出的方法,空间离散使用 MUSCL 方法引入斜率限制器,时间离散使用二阶 Runge-Kutta 方法,用 Roe 格式的近似 Riemann 解计算界面通量。

1 控制方程

对于平面大范围的自由表面流动,水深尺度远小于平面尺度、无明显垂直环流、垂向流速小的浅水流动,若将水视为理想的不可压缩无粘性流体,并沿水深方向进行积分来简化方程,简化后的方程即为二维浅水方程。忽略科氏力和风力时其守恒形式^[5]为:

$$U_t + (E(U))_x + (G(U))_y = S(U) \quad (1)$$

其中, U, S 分别是守恒变量向量和源项, $E(U)$ 、 $G(U)$ 是对流项流量通量。

收稿日期:2012-02-07;修回日期:2012-05-11

基金项目:安徽省自然科学基金资助项目(090412045)

作者简介:吴红侠(1986-),女,安徽六安人,硕士研究生,主要从事计算流体力学研究;汪继文,教授,博导,研究方向为计算流体力学、偏微分方程应用、计算机模拟等。

$$U = \begin{pmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{pmatrix}, \quad E(U) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + \frac{1}{2}gH^2 \\ Huw \end{pmatrix},$$

$$G(U) = \begin{pmatrix} Hv \\ Huw \\ Hu^2 + \frac{1}{2}gH^2 \end{pmatrix}, \quad S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gH(S_{0x} + S_{fx}) \\ -gH(S_{0y} + S_{fy}) \end{pmatrix},$$

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{H^{\frac{4}{3}}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{H^{\frac{4}{3}}}$$

其中, H 为水深, u 和 v 分别是水平 x 和 y 方向深度平均的速度分量, g 是重力加速度, (S_{fx}, S_{fy}) 是河床底部摩擦项, (S_{0x}, S_{0y}) 是河床沿着 x 和 y 方向的坡降, n 为曼宁粗糙系数。

方程(1)在一个控制体 V 上积分, 利用格林公式, 可以得到控制方程的积分形式为:

$$\partial_t \int_V U dV + \oint_{\partial V} E(U) n_x dS + \oint_{\partial V} G(U) n_y dS = \int_V S(U) dV \quad (2)$$

其中, V 为单元的面积, ∂V 为单元的边界, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$ 为指向边界 ∂V 的单位外法向量, S 为源项单元积分值。

2 有限体积法数值离散

浅水方程的控制方程(1)是在直角坐标中利用有限体积法将其离散到非结构化网格中。在理论上非结构化网格是多边形的并且网格边界的数量是不限的, 但是在文中的研究中只使用三角网格^[6]。

使用时间步 Δt 将时间区间划分为子时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$, 并且在符合的三角单元 V_i 处离散空间域 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, 其中 $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_e} V_i$, N_e 是所有三角单元的数量。将求解区域剖分成为三角网格, 把变量存在三角网格单元的中心, 单元的边界为控制体, 采用的控制体如图 1 所示, 有限体积离散化可得式(3)。

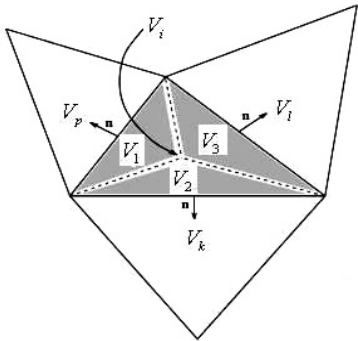


图 1 二维有限体积法的通用模板和符号

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta V_{ij \in N(i)}} \int_{\Gamma_i} F(U^n; \mathbf{n}) d\sigma +$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta V_i} \int_{V_i} S(U^n) dV \quad (3)$$

其中, ΔV_i 为单元 V_i 的面积, $N(i)$ 是与单元 V_i 相邻的一系列三角网格, U_i^n 是解 U 在单元 V_i 时间步为 t_n 时的平均值。

$$U_i = \frac{1}{\Delta V_i} \int_{V_i} U dV \quad (4)$$

且 $\mathbf{F}(U; \mathbf{n}) = E(U) n_x + G(U) n_y$

这里提出的有限体积格式包含一个预估阶段和一个校正阶段^[7,8], 可以表述为以下形式:

$$U_{ij}^n = \frac{1}{2}(U_i^n + U_j^n) - \frac{1}{2} \text{sgn}[\nabla \mathbf{F}(\bar{U}_{ij}^n; \mathbf{n}_{ij})](U_j^n - U_i^n) + \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{F}(\bar{U}_{ij}^n; \mathbf{n}_{ij})|^{-1} |S_{ij}^n| \quad (5)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta V_{ij \in N(i)}} \sum \mathbf{F}(\bar{U}_{ij}^n; \mathbf{n}_{ij}) \Delta \Gamma_{ij} + \Delta t S_i^n \quad (6)$$

其中, $\text{sgn}[\mathbf{A}]$ 为 \mathbf{A} 的符号矩阵, \bar{U}_{ij}^n 是一个近似于 Roe 平均状态的平均值。

$$\bar{U}_{ij}^n = \frac{1}{2}(U_i^n + U_j^n) \quad (7)$$

显然, 离散化(5)只有一阶精度。为了发展一个二阶精度有限体积格式, 在空间离散时使用 MUSCL 方法引入斜率限制器, 并且时间离散时使用二阶 Runge-Kutta 方法。

为了确定(5)中的符号矩阵, 在局部单元格常向 η 和切向 $\tau = \eta^\perp$ 中引入浅水方程如下:

$$\partial_t h + \partial_\eta(h w_\eta) = 0$$

$$\partial_t(h w_\eta) + \partial_\eta(h w_\eta^2 + \frac{1}{2}g h^2) = -g h \partial_\eta Z \quad (8)$$

$$\partial_t(h w_\tau) + \partial_\eta(h w_\eta w_\tau) = 0$$

其中, $w_\eta = (u, v) \cdot \eta$, $w_\tau = (u, v) \cdot \tau$ 分别是常向速度和切向速度。在这种情况下, (5)中的预估阶段的结果为:

$$W_{ij}^n = \frac{1}{2}(W_i^n + W_j^n) - \frac{1}{2} \text{sgn}[\nabla \mathbf{F}_\eta(\bar{W})](W_j^n - W_i^n) + \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{F}_\eta(\bar{W})|^{-1} |S_{ij}^n| \quad (9)$$

$$\text{其中, } W = \begin{pmatrix} h \\ h u_\eta \\ h u_\tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_\eta(W) = \begin{pmatrix} h u_\eta \\ h u_\eta^2 + \frac{1}{2}g h^2 \\ h u_\eta u_\tau \end{pmatrix},$$

$$S_{ij}^n = -g \frac{h_i + h_j}{2} (Z_j - Z_i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

式(9)中的 \bar{W} 由 Roe 平均状态给出:

$$\bar{W} = \frac{1}{2}(h_i + h_j) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{u_i\sqrt{h_i} + u_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}}\eta_x + \frac{v_i\sqrt{h_i} + v_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}}\eta_y \\ -\frac{u_i\sqrt{h_i} + u_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}}\eta_y + \frac{v_i\sqrt{h_i} + v_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}}\eta_x \end{pmatrix} \quad (10)$$

式(5)中的雅克比符号矩阵和逆矩阵可以这样定义

$$\begin{aligned} \text{sgn}[\nabla F_\eta(\bar{W})] &= \mathbf{R}(\bar{W}) \text{sgn}[\mathbf{A}(\bar{W})] \mathbf{R}^{-1}(\bar{W}) \\ |\nabla F_\eta(\bar{W})^{-1}| &= \mathbf{R}(\bar{W}) |\mathbf{A}(\bar{W})| \mathbf{R}^{-1}(\bar{W}) \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{R}(\bar{W})$ 和 $\mathbf{A}(\bar{W})$ 分别是右特征向量和对角矩阵的重构。

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{u}_\eta - \bar{c} & 0 & \bar{u}_\eta + \bar{c} \\ \bar{u}_\tau & 1 & \bar{u}_\tau \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{u}_\eta - \bar{c} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u}_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u}_\eta + \bar{c} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_\eta + \bar{c}}{2\bar{c}} & -\frac{1}{2\bar{c}} & 0 \\ -\bar{u}_\tau & 0 & 1 \\ -\frac{\bar{u}_\eta - \bar{c}}{2\bar{c}} & \frac{1}{2\bar{c}} & 0 \end{pmatrix}$$

其中, $\bar{c} = \sqrt{gh}$ 为控制体边界的波速。式(9)中的符号矩阵和逆矩阵分别为:

$$\begin{aligned} \text{sgn}[\nabla F_\eta(\bar{W})] &= \\ \begin{pmatrix} \frac{\text{sgn}(\bar{\lambda}_1) \bar{\lambda}_3 - \text{sgn}(\bar{\lambda}_3) \bar{\lambda}_1}{2\bar{c}} & \frac{\text{sgn}(\bar{\lambda}_3) - \text{sgn}(\bar{\lambda}_1)}{2\bar{c}} & 0 \\ \frac{|\bar{\lambda}_1| |\bar{\lambda}_3| - |\bar{\lambda}_3| |\bar{\lambda}_1|}{2\bar{c}} & \frac{|\bar{\lambda}_3| - |\bar{\lambda}_1|}{2\bar{c}} & 0 \\ \bar{u}_\tau \left(\frac{\text{sgn}(\bar{\lambda}_1) \bar{\lambda}_3 - \text{sgn}(\bar{\lambda}_3) \bar{\lambda}_1}{2\bar{c}} - \text{sgn}(\bar{u}_\eta) \right) & \bar{u}_\tau \frac{\text{sgn}(\bar{\lambda}_3) - \text{sgn}(\bar{\lambda}_1)}{2\bar{c}} & \text{sgn}(\bar{\lambda}_2) \end{pmatrix} \\ |\nabla F_\eta(\bar{W})^{-1}| &= \\ \begin{pmatrix} \frac{\bar{\lambda}_3}{|\bar{\lambda}_1|} - \frac{\bar{\lambda}_1}{|\bar{\lambda}_3|} & \frac{1}{|\bar{\lambda}_3|} - \frac{1}{|\bar{\lambda}_1|} & 0 \\ \frac{\text{sgn}(\bar{\lambda}_1) \bar{\lambda}_3 - \text{sgn}(\bar{\lambda}_3) \bar{\lambda}_1}{2\bar{c}} & \frac{\text{sgn}(\bar{\lambda}_3) - \text{sgn}(\bar{\lambda}_1)}{2\bar{c}} & 0 \\ \bar{u}_\tau \left(\frac{\bar{\lambda}_3}{|\bar{\lambda}_1|} - \frac{\bar{\lambda}_1}{|\bar{\lambda}_3|} - \frac{1}{|\bar{\lambda}_2|} \right) & \bar{u}_\tau \left(\frac{1}{|\bar{\lambda}_3|} - \frac{1}{|\bar{\lambda}_1|} \right) & \frac{1}{|\bar{\lambda}_2|} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中, $\bar{\lambda}_1 = \bar{u}_\eta - \bar{c}$, $\bar{\lambda}_2 = \bar{u}_\eta$, $\bar{\lambda}_3 = \bar{u}_\eta + \bar{c}$ 。使用上述矩阵,解状态 W_{ij}^n 能够很容易的从预估阶段(9)中获得。一旦 W_{ij}^n 被计算出, U_{ij}^n 通过使用转换函数 $v = (u_\tau, u_\eta) \cdot \eta, u = (u_\tau, u_\eta) \cdot \tau$ 来恢复。

文中采用 Roe 格式的近似 Riemann 解计算数值

通量^[9,10]。

2.1 源项处理

在底面非平坦地形的情况下,Roe 方法处理源项会破坏格式的和谐性并影响稳定性。文中为保证格式的和谐性和稳定性,对底坡源项的离散采用将底坡源项设为零的方法。

2.2 限制器(Limiter)函数

高阶精度的有限体积法中,为了消除数值震荡,需要在变量的重构过程中使用限制器函数,文中使用的是文献[11,12]中提出的一种由 van Albada 限制器发展的新型可微限制器函数。这种可微的限制器函数对保证数值解的收敛起着重要的作用。

3 超临界流斜水跃问题的动画模拟

超临界流斜水跃问题是一个有精确解的二维间断问题,是验证二维浅水波问题求解方法的经典有效方法。

本算例采用的模型的计算域是一个长为 40m 的平底矩形河道,上游宽为 30m,在河道一边 10m 处以夹角 $\alpha = 8.95^\circ$ 开始收缩形成一个斜壁,水流和斜壁相互作用形成一个角度为 β 的激波,这就是水跃。初始条件为水深 $h_0 = 1\text{m}$, x 方向的流速 $u_0 = 8.57\text{m/s}$, y 方向的流速为 $v_0 = 0\text{m/s}$, 出口处平移边界条件, 固壁采用滑移无穿透边界条件。该问题的精确解收敛于一个超临界流稳定状态,流域内被一个角度为 $\beta = 30^\circ$ 的水跃分成两个稳态区域。其中,水跃水深为 $h = 1.5\text{m}$, 流速 $|U| = 7.9556\text{m/s}$ 。文中计算域被剖分成 2093 个三角形非结构化网格(见图 2),时间步长取 $\Delta t = 0.02$,数值实验结果如图 3 所示。

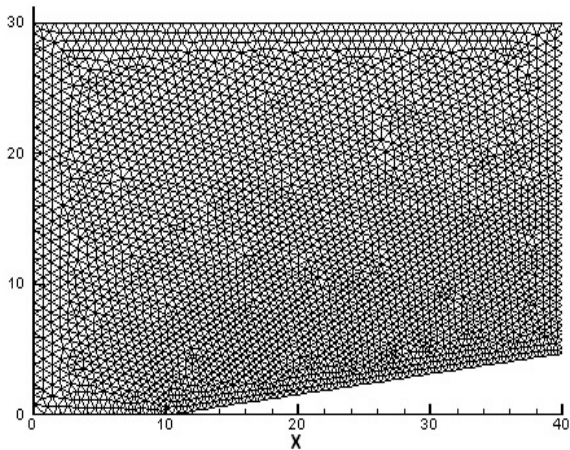


图 2 计算网格

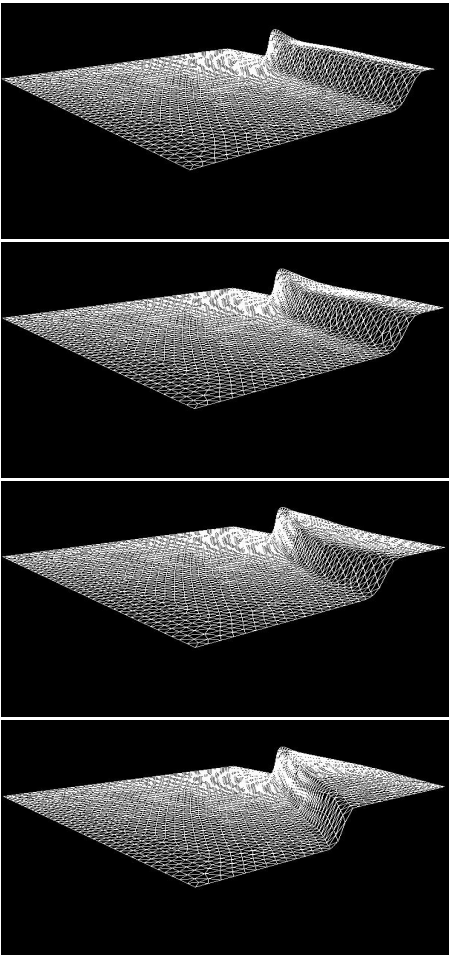


图 3 斜水跃问题数值模拟结果截图

4 结束语

文中建立的可求解二维浅水方程的新的分辨率有限体积法克服了传统方法处理间断问题时出现的离散精度和计算稳定性的矛盾。该方法既有较高的计算精度又避免了高频的数值震荡。从算例的数值模拟的结果来看,文中采用的数值实验方法模拟超临界流斜

水跃问题具有很好的非震荡性。

参考文献:

- [1] 李艳红,周华君,时 钟. 山区河流平面二维流场的数值模拟[J]. 水科学进展,2003,14(3):424-429.
- [2] Aizinger V, Dawson C. A discontinuous Galerkin method for two-dimensional flow and transport in shallow water[J]. Advances in Water Resources,2002,25(1):67-84.
- [3] 潘存鸿,林炳尧,毛献众. 一维浅水流动方程的 Godunov 格式求解[J]. 水科学进展,2003,14(4):430-436.
- [4] Benkhaldoun F, Elmahi I, Seaid M. A new finite volume method for flux-gradient and source-term balancing in shallow water equations[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2010,199(49-52):3324-3335.
- [5] 张姝慧. 求解浅水方程的光滑粒子流体动力学法[D]. 合肥:安徽大学,2007.
- [6] 汪继文,刘儒勋. 间断解问题的有限体积法[J]. 计算物理,2001,18(2):97-105.
- [7] Benkhaldoun F, Elmahi I, Seaid M. Well-balanced finite volume schemes for pollutant transport by shallow water equations on unstructured meshes[J]. J. Comput. Phys,2007,226(1):180-203.
- [8] Benkhaldoun F, Seaid M. A simple finite volume method for the shallow water equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2010,234(1):58-72.
- [9] 王志力,耿艳芬,金 生. 具有复杂计算域和地形的二维浅水流动数值模拟[J]. 水利学报,2005,36(4):439-444.
- [10] 刘 刚,金 生. 基于修正 Roe 格式的有限体积法求解二维浅水方程[J]. 水利水运工程学报,2009(3):29-33.
- [11] Jawahar P, Kamath H. A High-resolution Procedure for Euler and Navier-Stokes Computations on Unstructured Grids[J]. Journal of Computational Physics,2000,164(1):165-203.
- [12] 窦 红,汪继文. 求解二维浅水方程的一种高分辨率有限体积法[J]. 应用数学和计算数学学报,2006,20(2):83-88.

(上接第 54 页)

参考文献:

- [1] Rosenschein J S. Rational Interaction: Cooperation Among Intelligent Agents[D]. Stanford:Stanford University,2002.
- [2] Kraus S, Wilkenfeld J, Zlotkin G. Multi-agent Negotiation under Time Constraints[J]. Artificial Intelligence,2004,72(2):297-345.
- [3] Yen J, Yan Yonghe, Contreras J. Multi-agent approach to the planning of power transmission expansion[J]. Decision Support Systems,2004,28(3):279-290.
- [4] 张 虹,邱玉辉. 一种基于对策论的协商模型[J]. 南京大学学报(自然科学),2001,37(2):159-164.
- [5] 史慧敏,陈哲强,王文杰,等. 多 Agent 通信与合作机制研究[J]. 微电子学与计算机,2007,24(5):30-33.
- [6] 申 静,姚军财. 基于多 Agent 协商的决策支持系统的研究[J]. 微电子学与计算机,2009,26(5):76-78.
- [7] 周 清,林 拉. 基于 Agent 技术的在线测试系统研究与设计[J]. 计算机技术与发展,2007,17(10):184-188.
- [8] 许精明. Agent 通信及多 Agent 系统(MAS 协作机制的研究)[J]. 微型电脑应用,2006(7):76-78.
- [9] 林 琳,刘 锋. 基于改进合同网协议的多 Agent 协作模型[J]. 计算机技术与发展,2010,20(3):71-75.
- [10] 李 立,邹 华,杨放春. 一种基于 Agent 技术的安全能力自动协商机制[J]. 计算机工程,2007,33(10):126-128.
- [11] 刘 俊,曹 斌,谭丹丹. 基于拍卖机制的改进合同网协商策略[J]. 计算机应用,2007,27(2):494-496.
- [12] 张胜民. 陆军战役战术火力毁伤作战部队标准化计算研究[D]. 宣化:炮兵指挥学院,2006.