

节点非线性耦合的复杂动态网络同步控制研究

顾梦祺¹, 蒋国平¹, 张金鑫²

(1. 南京邮电大学 自动化学院, 江苏 南京 210046;

2. 淮安信息职业技术学院 电子工程学院, 江苏 淮安 223003)

摘 要:文中研究节点状态非线性耦合的复杂动态网络的局部同步和全局同步的问题。不同于现有的这类网络的利用节点状态变量设计控制器进行同步控制的方法,提出了一种设计同步控制器的新方法,该方法只需利用网络节点输出变量构造控制器,使其达到同步,克服了现有方法利用节点状态变量设计控制器存在的不足,使控制器实现起来更加简单。利用 Lyapunov 方法给出这类复杂网络的同步准则,以 Lorenz 混沌映射作为复杂网络的节点进行数值仿真,研究表明,这种方法能够使节点状态非线性耦合的复杂动态网络达到同步,通过系统仿真,证明了文中所提方法的有效性。

关键词:复杂动态网络;非线性内部耦合;局部同步;全局同步

中图分类号:TP31

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2012)08-0107-04

Synchronization of Complex Dynamical Networks with Nonlinearly Coupled Nodes

GU Meng-qi¹, JIANG Guo-ping¹, ZHANG Jin-xin²

(1. College of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210046, China;

2. Institute of Electronic Engineering, Huaian College of Information Technology, Huaian 223003, China)

Abstract: It investigates the local and global synchronization of nonlinearly coupled complex dynamical networks. Unlike the existing synchronization methods, propose a new approach to design the synchronization controller. This method can only use the nodes' outputs of a complex network to construct synchronization controllers and it overcomes the shortcomings of the existing method which uses the nodes' state variables to design the controller. The controller proposed is much more easier to achieve. Furthermore, synchronization criteria is achieved for a complex network on the basis of the Lyapunov stability theory. Using the Lorenz system as a node of the network, studies have shown that the network can be synchronized under the proposed controller and numerical simulations are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: complex dynamical networks; nonlinear inner-coupling; local synchronization; global synchronization

0 引言

如今,复杂动态网络已变得越来越重要,现实世界中的许多复杂系统都可以用复杂网络来建模,例如:Internet网、万维网、食物链、生物神经网络、人际关系网等等。在最近几十年里,复杂网络的同步控制也得到广泛关注,成为了研究热点,涌现出大量的研究成

果。在人们的日常生活中,同步也是大家所熟悉的现象,例如,青蛙的齐鸣、萤火虫的齐发光、心肌细胞和神经网络的同步^[1~3]、剧场观众鼓掌步骤一致^[4]、通信网络以及无线传感器网络的同步^[5,6]等等。在文献[7~9]中,针对节点状态线性耦合的复杂动态网络给出了同步条件。文献[10]中提出一种在现实工程中更为实际的网络模型-节点输出线性耦合模型,并研究了这种网络模型的内部同步问题。

目前人们对线性耦合的复杂网络的同步研究比较多,而对非线性耦合同步研究比较少见。由于实际网络的复杂性,一个网络中两个节点的相互作用并不能仅由节点状态变量的线性耦合函数精确描述,例如,蜂窝神经网络中两个神经元的相互作用就是通过神经元节点状态变量的非线性耦合进行的^[11]。在文献[12]中,研究了一类线性耦合和非线性耦合的复杂动态网络的自适应同步条件。文献[13]研究了节点状态非

收稿日期:2011-12-27;修回日期:2012-03-29

基金项目:国家自然科学基金项目(60874091);江苏省“六大人才高峰”高层次人才项目(SJ209006);高等学校博士点基金项目(20103223110003);江苏省自然科学基金项目(BK2010526)

作者简介:顾梦祺(1987-),女,江苏徐州人,硕士研究生,主要研究方向为复杂系统与网络控制;蒋国平,教授,博士生导师,IEEE会员,IEEE非线性电路与系统技术委员会委员,中国通信学会青年工作委员会委员,主要从事复杂系统与网络控制、复杂网络与信息安全、混沌通信等方面的研究工作。

线性耦合的复杂时延动态网络的同步条件。文献[14]讨论了线性耦合和非线性耦合的复杂动态网络的鲁棒自适应控制问题。

现有的研究成果中,在讨论节点状态非线性耦合的复杂网络同步控制时均是利用节点状态变量设计反馈控制器以达到网络同步,而节点状态一般是 n 维的向量,所以这种方法设计控制器,在实际网络通信工程中会占用大量资源,并且很多情况下节点状态不是完全可测。因此,利用节点输出变量进行同步控制器设计具有重要的实际应用价值。

文中利用节点输出信号作为反馈变量来设计控制器使得网络达到同步,基于 Lyapunov 稳定性理论,得到控制器设计条件,在仿真中利用 Lorenz 电路作为节点的模型,验证本方法的效果。

1 问题描述

考虑包含 N 个相同的非线性耗散耦合的节点的复杂动态网络状态方程为:

$$\dot{x}_i = f(x_i, t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}(h(x_j) - h(x_i)) + u_i \quad (1)$$

式中, $1 \leq i \leq N$, 第 i 个节点的状态向量为 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$, f, h 是从 R^n 到其自身的非线性连续可微函数, 节点动力学方程为 $\dot{x}_i = f(x_i, t)$, $u_i \in R^n$ 为控制输入, $\sum_{j=1}^N c_{ij}(h(x_j) - h(x_i))$ 代表网络的耗散耦合, $C = (c_{ij})_{N \times N} \in R^{N \times N}$ 为整个无向网络的外部耦合矩阵, 由于考虑的网络是无向的, 因而很容易知道外部耦合矩阵 C 是对称的且 $c_{ii} = -\sum_{j=1}^N c_{ij} = -\sum_{j=1}^N c_{ji}$ 。则

(1) 式可以转换为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i, t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}h(x_j) + c_{ii}h(x_i) + u_i = f(x_i, t) \\ &+ \sum_{j=1}^N c_{ij}h(x_j) + u_i \end{aligned} \quad (2)$$

定义 1 (D1): 假设 $x_i(t; t_0, X_0)$ ($1 \leq i \leq N$) 是复杂动态网络 (2) 的解, 其中 $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$, $f: \Omega \times R^+ \rightarrow R^n$ 和 $h_i: \Omega \times \dots \times \Omega \rightarrow R^n$ ($1 \leq i \leq N$) 均为连续可微的, $\Omega \subseteq R^n$ 。若存在一个非空子集 $\Lambda \subseteq \Omega$, 对于 $x_i^0 \in \Lambda$ ($1 \leq i \leq N$), 当 $t \geq t_0$, $1 \leq i \leq N$ 时, 有 $x_i(t; t_0, X_0) \in \Omega$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t; t_0, X_0) - s(t; t_0, X_0)\|_2 = 0$, 其中, $1 \leq i \leq N$, $s(t; t_0, x_0)$ 是系统 $\dot{x} = f(x, t)$, $x_0 \in \Omega$ 的解, 那么则称动态网络 (2) 实现同步, 且 $\Lambda \times \dots \times \Lambda$ 被称为复杂动态网络 (2) 的同步区域。

设复杂网络 (2) 的同步流形为: $\dot{s}(t) = f(s, t)$ 。这里的 $s(t)$ 可能是一个平衡点, 一个周期轨道, 一个非

周期轨道, 甚至是相空间中的混沌轨道。则这个非线性耦合的复杂动态网络的同步解为:

$$S(t) = (s_1^T(t), s_2^T(t), \dots, s_N^T(t))^T。$$

令误差向量 $e_i(t) = s(t) - x_i(t)$ ($1 \leq i \leq N$), 当复杂网络 (2) 达到同步时, 网络节点的状态向量和同步流形的状态向量满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t) - x_i(t)\| = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, 式中, $\|\cdot\|$ 表示向量的 Euclidean 范数。则网络 (2) 在控制器作用下的同步误差为:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{s}(t) - \dot{x}_i(t) = f(s, t) - f(x_i, t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}h(s) \\ &- \sum_{j=1}^N c_{ij}h(x_j) - u_i \end{aligned} \quad (3)$$

假设 1: 假设对于 $x, y \in R^n$, $x \neq y$, 存在常数 $\delta > 0$, 使得 $0 \leq \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \leq \delta$ 。

假设 2: 假设存在非负常数 α 满足 $\|Df(s, t)\|_2 = \|A(t)\|_2 \leq \alpha$, 其中 $A(t)$ 是 $f(x, t)$ 在 $s(t)$ 处的 Jacobian 矩阵。如果上式成立, 那么可以得到 $\| \frac{A^T(t) + A(t)}{2} \|_2 \leq \alpha$ 。

引理 1: 对于任意的 $x \in R^n$, 若 $P \in R^{n \times n}$ 是正定矩阵, $Q \in R^{n \times n}$ 是对称矩阵, 则有不等式成立 $\lambda_{\min}(P^{-1}Q)x^T Px \leq x^T Qx \leq \lambda_{\max}(P^{-1}Q)x^T Px$, 式中, $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 是矩阵 P 的最小与最大特征值。

引理 2: 若 $G = (g_{ij})_{N \times N}$ 是一个不可约矩阵, 且满足 $g_{ij} = g_{ji} \geq 0$ ($i \neq j$), $g_{ii} = -\sum_{j=1}^N g_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 那么

$$\text{矩阵 } \tilde{G} = \begin{bmatrix} g_{11} - \varepsilon_1 & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} - \varepsilon_N \end{bmatrix} \text{ 的所有特征值均}$$

为负数, 其中, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ 是非负常数并且 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N > 0$ 。

2 局部同步

本节研究该类网络的局部同步问题, 将误差动态系统 (4) 在零点处进行线性化, 可得:

$$\dot{e}_i(t) = \dot{s}(t) - \dot{x}_i(t) = -A(t)e_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}(h(s) - h(x_j)) - u_i \quad (4)$$

定理 1: 假设 H1, H2 成立, 通过以下设计的控制器作用下, 可使误差动态系统 (5) 在原点局部渐近稳定, 即非线性耦合的复杂动态网络 (2) 的同步解 $S(t)$ 是局部渐近稳定的。

$$u_i = -d_i B e_{ji} = -d_i B H e_i(t) = -d_i B H (s(t) - x_i(t)) \quad (5)$$

其中, $1 \leq i \leq N$, d_i 为常数, $B \in R^{n \times 1}$, $H \in R^{1 \times n}$,

$$e_{yi} = He_i(t) = H(s(t) - x_i(t))。$$

证明:选取 Lyapunov 函数为: $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T e_i。$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{e}_i^T e_i + e_i^T \dot{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N e_i^T \left(-\frac{A^T(t) + A(t)}{2} \right) e_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_i^T \\ &\quad (h(s) - h(x_j)) + \sum_{i=1}^N d_i e_i^T \left(\frac{H^T B^T + BH}{2} \right) e_i \leq \\ &\quad \sum_{i=1}^N \alpha e_i^T e_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_i^T \delta e_j + \sum_{i=1}^N d_i e_i^T \rho_{\max} e_i \\ &= \delta e^T (\Gamma + \text{diag} \\ &\quad \left\{ \frac{\alpha}{\delta} + \frac{d_1 \rho_{\max}}{\delta}, \frac{\alpha}{\delta} + \frac{d_2 \rho_{\max}}{\delta}, \dots, \frac{\alpha}{\delta} + \frac{d_N \rho_{\max}}{\delta} \right\}) e \end{aligned}$$

其中 $e = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T$, $\Gamma = (c_{ij})_{N \times N}$, ρ_{\max} 是矩阵 $\frac{H^T B^T + BH}{2}$ 的最大特征值。由引理 2 可得, 当 $-\frac{\alpha}{\delta} - \frac{d_1 \rho_{\max}}{\delta}, \dots, -\frac{\alpha}{\delta} - \frac{d_N \rho_{\max}}{\delta}$ 均为非负常数时, 且上述式子之和大于 0 时可使得矩阵 $(\Gamma + \text{diag} \{ \frac{\alpha}{\delta} + \frac{d_1 \rho_{\max}}{\delta}, \frac{\alpha}{\delta} + \frac{d_2 \rho_{\max}}{\delta}, \dots, \frac{\alpha}{\delta} + \frac{d_N \rho_{\max}}{\delta} \})$ 为负定的。即在此控制器作用下, 非线性耦合的复杂动态网络(2)的同步解 $S(t)$ 是局部渐近稳定的。至此证明结束。

3 全局同步

将节点动力学方程 $\dot{x}_i = f(x_i, t)$ 写为 $\dot{x}_i = Ax_i(t) + g(x_i, t)$, 其中 $A \in R^{n \times n}$ 是一个常数矩阵, $g: \Omega \times R^+ \rightarrow R^n$ 是一个光滑的非线性函数。则非线性耦合的复杂动态网络(2)式可以写成:

$$\dot{x}_i = Ax_i(t) + g(x_i, t) + \sum_{j=1}^N c_{ij} h(x_j) + u_i \quad (6)$$

令误差向量 $e_i(t) = s(t) - x_i(t)$ ($1 \leq i \leq N$), 则网络(7)在控制器作用下的同步误差为:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{s}(t) - \dot{x}_i(t) = Ae_i(t) + g(s, t) - g(x_i, t) + \\ &\quad \sum_{j=1}^N c_{ij} (h(s) - h(x_j)) - u_i \end{aligned} \quad (7)$$

由于 A 是一个给定的常数矩阵, 则一定存在一个非负常数 β 使得 $\| \frac{A^T + A}{2} \|_2 \leq \beta。$

假设 3: 假设非线性函数 $g(x, t)$ 是 Lipschitz 连续的, 即对于 $x \in R^n, y \in R^n$, 存在一个正数 μ , 满足不等式: $\|g(x, t) - g(y, t)\| \leq \mu \|x - y\|。$

定理 2: 假设 H1、H2 成立, 通过以下设计的控制器作用下, 可使误差动态系统(8)在原点全局渐近稳定, 即非线性耦合的复杂动态网络(7)的同步解 $S(t)$ 是全局渐近稳定的。

$$u_i = -d_i B e_{yi} = -d_i B H e_i(t) = -d_i B H (s(t) - x_i(t)) \quad (8)$$

其中, $1 \leq i \leq N, d_i$ 为常数, $B \in R^{n \times 1}, H \in R^{1 \times n}, e_{yi} = H e_i(t) = H (s(t) - x_i(t))。$

证明: 选取 Lyapunov 函数为: $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T e_i。$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{e}_i^T e_i + e_i^T \dot{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \left(\frac{A^T + A}{2} \right) e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i^T (g(s, t) - g(x_i, \\ &\quad t)) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_i^T (h(s) - h(x_j)) + \sum_{i=1}^N d_i e_i^T \\ &\quad \frac{H^T B^T + BH}{2} e_i \leq \sum_{i=1}^N \beta e_i^T(t) e_i(t) + \sum_{i=1}^N \mu e_i^T(t) e_i(t) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_i^T(t) \delta e_j(t) + \sum_{i=1}^N d_i e_i^T(t) \rho_{\max} e_i(t) \\ &= \delta e^T (\Gamma + \text{diag} \\ &\quad \left\{ \frac{\beta + \mu + d_1 \rho_{\max}}{\delta}, \frac{\beta + \mu + d_2 \rho_{\max}}{\delta}, \dots, \frac{\beta + \mu + d_N \rho_{\max}}{\delta} \right\}) e \end{aligned}$$

由引理 2 可得, 同样在选取合适参数时可以使得上式中间的矩阵为负定的。即在此控制器作用下, 非线性耦合的复杂动态网络(7)的同步解 $S(t)$ 是全局渐近稳定的。至此证明结束。

4 仿真

为了验证提出方法的可行性, 采用节点为 Lorenz 系统的网络进行数值仿真, 仿真时所采用的网络拓扑为全局耦合。Lorenz 系统是经典的混沌系统^[15], 其动力学方程如下所示:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_{i1} x_{i3} \\ x_{i1} x_{i2} \end{pmatrix}$$

其中, $a = 10, b = \frac{8}{3}, c = 28$, 且 $1 \leq i \leq N$, 此时,

系统具有一个混沌吸引子, 系统各维的动态特性如图 1 所示。

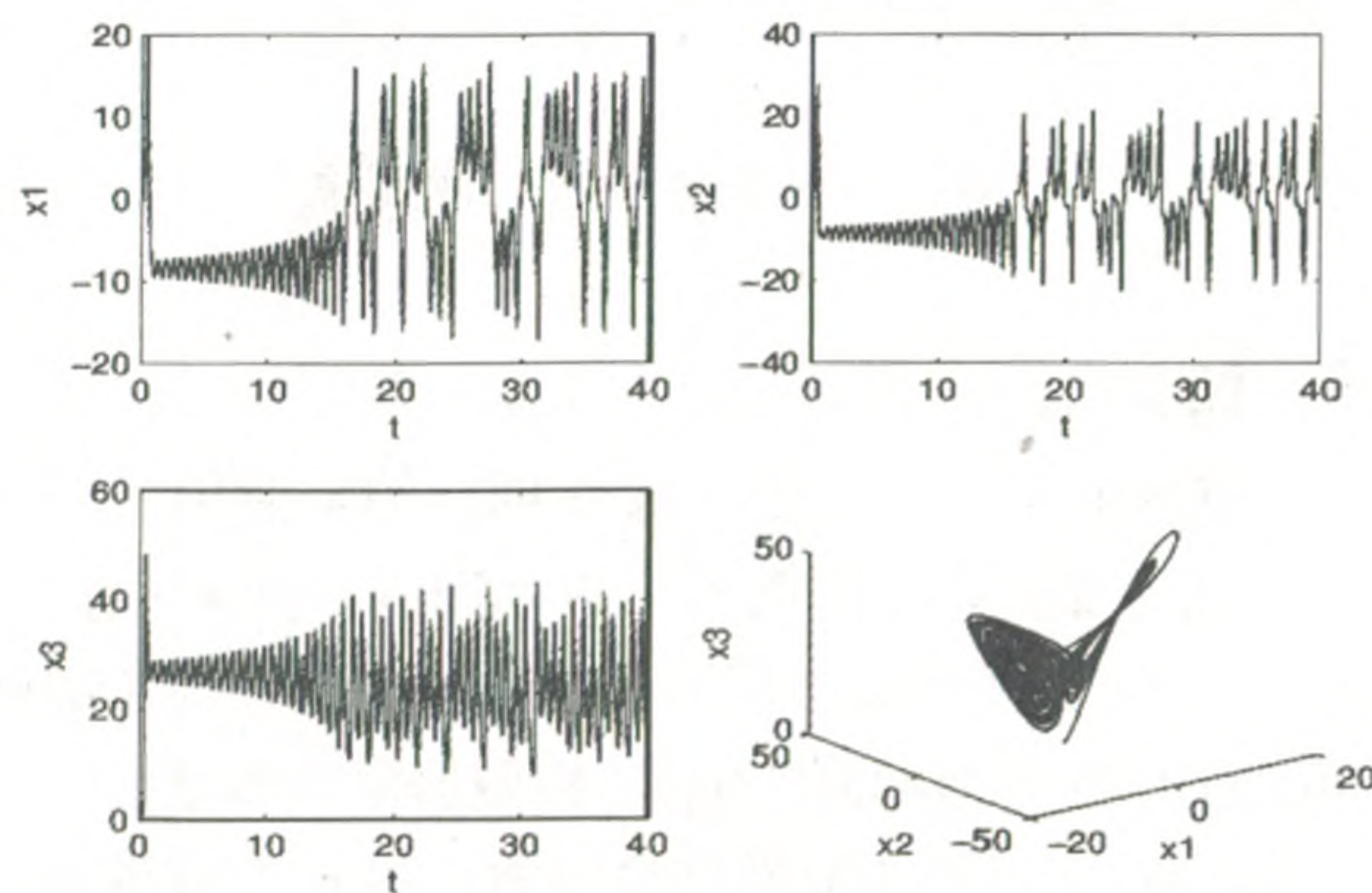


图 1 Lorenz 系统状态变量的动态特性

此混沌吸引子在一定范围内是有界的,对此系统的任意一个状态 x_i, s , 存在一个常数 M 满足 $|x_{ij}| \leq M$, $|s_j| \leq M$ 。

有:

$$\|g(x_i, t) - g(s, t)\|_2 = \sqrt{(x_{i3}e_{i1} + s_1e_{i3})^2 + (x_{i2}e_{i1} + s_1e_{i2})^2} \leq 2M \|x_i - s\|_2$$

由此可见, Lorenz 系统满足假设 3。

仿真中,考虑含 50 个相同节点的非线性耦合的复杂网络,取 $h(x_j) = 0.5\sin(x_j) + x_j$, 则 $h(x) - h(y) = 0.5\sin(x) + x - 0.5\sin(y) - y$, 那么可以得到: $0.5 \leq \frac{h(x) - h(y)}{x - y} = 0.5 \times (\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}) + 1 \leq 1.5$ 。故 $h(x)$ 满足假设 1。

由 50 个节点构成的非线性耦合的复杂网络方程可描述为:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^N c_{ij} \begin{pmatrix} 0.5\sin(x_{j1}) + x_{j1} \\ 0.5\sin(x_{j2}) + x_{j2} \\ 0.5\sin(x_{j3}) + x_{j3} \end{pmatrix} - d_i B H e_i, 1 \leq i \leq 50$$

在仿真中采用的参数如下:各节点的初始状态为 $x_i(0) = (0.1 + 0.1i; 0.2 + 0.2i; 0.3 + 0.3i)$, $1 \leq i \leq 50$, 同步流形为 $s(0) = (4; 5; 6)$, 外部耦合矩阵为全局耦合矩阵, $B = [1; 1; 1]$, $H = [0, 1, 0]$, 此时 $\rho_{\max} = 1.366$, 取反馈增益为 $d_i = -10$ 。仿真图 2 为第 1, 10, 20, 30, 40, 50 个节点的第 1, 2, 3 维分量的同步误差。

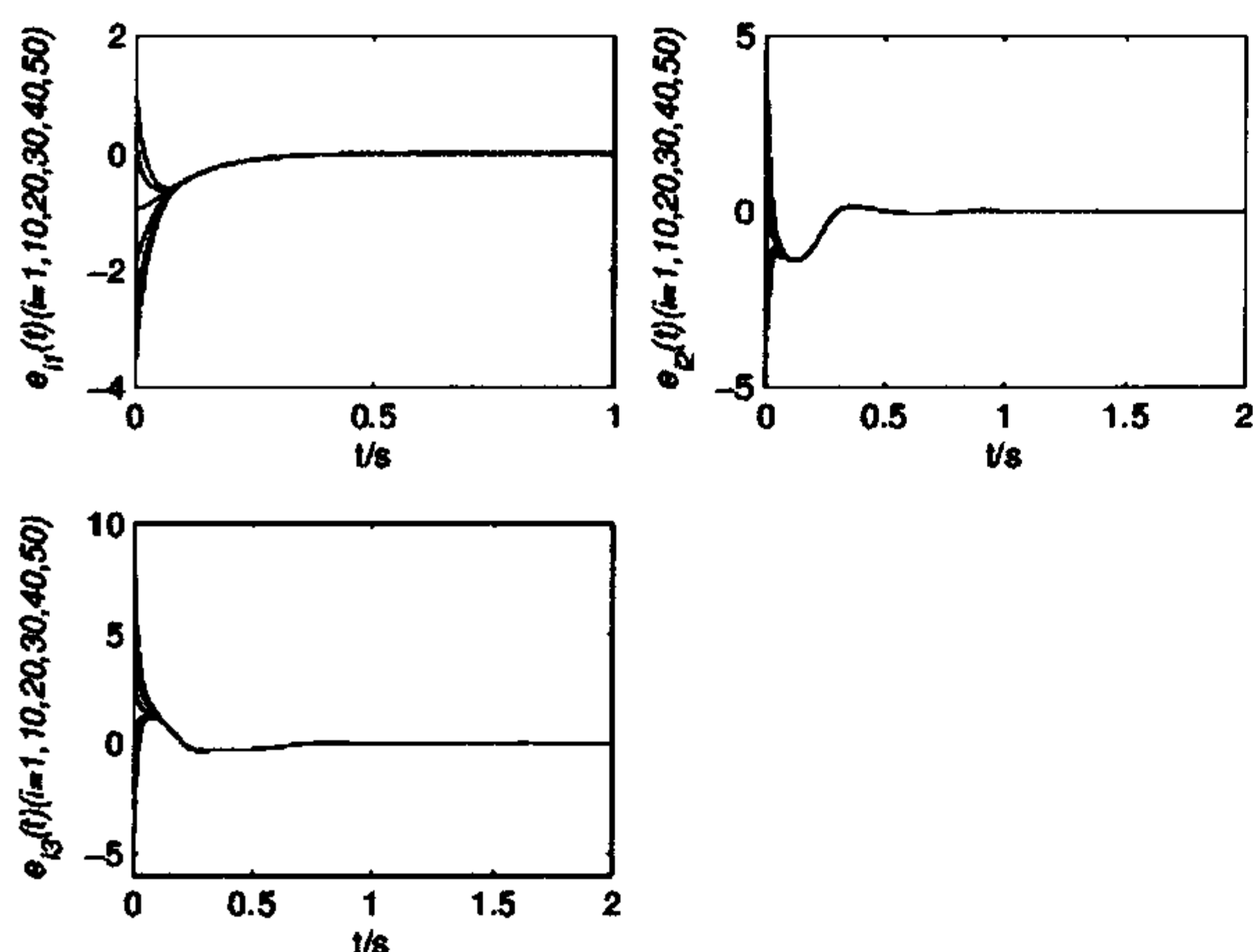


图 2 各维分量的同步误差

5 结束语

文中针对节点状态非线性耦合的复杂网络,利用节点输出变量设计反馈控制器,基于 Lyapunov 稳定性定理,得出此类网络的局部同步准则和全局同步准则。相比于以往类似的研究成果,控制器更为简单。此外,以 Lorenz 系统作为复杂网络的节点进行数值仿真,验证结果表明了文中所设计的控制器方案能够快速有效

地实现复杂网络的同步。

参考文献:

- [1] Strogatz S H, Stewart I. Coupled oscillators and biological synchronization[J]. Scientific American, 1993, 269(6): 102-109.
- [2] Gray C M. Synchronous oscillations in neuronal systems: mechanisms and functions[J]. Journal of Computer Neuro Science, 1994, 1(1-2): 11-38.
- [3] Fang Y, Kincaid T G. Stability analysis of dynamical neural networks[J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 1996, 7(4): 996-1006.
- [4] Nfda Z, Ravasz E, Vicsek T. Physics of the rhythmic applause[J]. Physical Review E, 2000, 61(6): 6987-6992.
- [5] Wang X F, Chen G. Synchronization in small-world dynamical networks[J]. Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(1): 187-192.
- [6] Wang X F, Chen G. Synchronization in scale free dynamical networks: robustness and fragility[J]. IEEE Transactions on Circuits System, 2002, 49(1): 54-62.
- [7] Zou Y L, Chen G R. Pinning-controlled synchronization of complex networks with bounded or unbounded synchronization regions[J]. Chinese Physics B, 2009, 18(8): 3337-3346.
- [8] Hill D J, Zhao J. Global synchronization of complex dynamical networks with non-identical nodes[C]//Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Mexico: [s. n.], 2008: 817-822.
- [9] Li X, Wang X F, Chen G R. Pinning a complex dynamical network to its equilibrium[J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2004, 51(10): 2074-2087.
- [10] Jiang G P, Tang W K S, Chen G. A state-observer-based approach for synchronization in complex dynamical networks[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems - I, 2006, 53(12): 2739-2745.
- [11] Ozean N, Arik S. Global robust stability analysis of neural networks with multiple time delays[J]. IEEE Trans. on Circuits & Syst. I, 2006, 53: 166-176.
- [12] Zhou J, Lu J, Lü J H. Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(4): 652-656.
- [13] Liu T, Zhao J, Hill D J. Synchronization of complex delayed dynamical networks with nonlinearly coupled nodes[J]. Chaos Solitons Fractals, 2009, 40: 1506-1519.
- [14] Li Z, Chen G. Robust adaptive synchronization of uncertain dynamical networks[J]. Physics Letters A, 2004, 324: 166-178.
- [15] Liang X Y, Zhang J F, Xia X H. Adaptive synchronization for generalized Lorenz systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(7): 1740-1746.