一类求全局最小点的填充函数及其算法

姚桂霞，叶仲泉，马 雪
（重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331）

摘 要：填充函数法是求解全局最优化问题的一种重要的方法，其关键之一在于构造一类性质良好的填充函数。文中基于填充函数的严格定义，针对全局优化问题 (P_0)：$\min_{x \in R^n} f(x)$，在目标函数 $f(x)$ 满足一定条件的基础上，提出了一类求其全局最小解的填充函数，并在适当的假设条件下，研究证明了该函数的填充性质和其他的分析性质，并按照这些相关性质设计了相应的填充函数算法。该函数形式简单，便于计算。最后，还进行了数值试验测试，结果表明，该函数是可行的，算法是有效的。

关键词：填充函数；全局优化；全局最小点；局部极小点

中图分类号：TP301.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-629X(2012)08-0096-04

A Class of Filled Function for Solving Global Minimum Point and Its Algorithm

YAO Gui-xia，YE Zhong-quan，MA Xue
(College of Mathematics and Statistics，Chongqing University，Chongqing 401331，China)

Abstract：Filled function method is a kind of important method for solving global optimization problem and the key of the method is to construct a filled function with good properties. Based on the strict definition of filled function and certain conditions the objective function $f(x)$ meets，construct a class of novel filled function with simple form and easy to calculate for global optimization problem (P_0)：$\min_{x \in R^n} f(x)$，study and prove filled properties and other analysis properties of the function in the appropriate assumptions. Besides，according to the related properties，design the corresponding algorithm for filled function. Finally，the numerical experiment shows that the function is feasible and the algorithm is effective.

Key words：filled function；global optimization；global minimum；local minimum

0 引 言

在现实生活中，全局优化问题具有广泛的应用，尤其是在科学计算、经济工程、生物科学等方面。最近几年，全局优化在理论和实践方面做出了很多进展，对于求解全局优化的算法也是有很多。这些算法大致可以分为两类，即确定性算法和随机性算法，其中填充函数法属于确定性算法。

填充函数法最早是由 Ge 提出的为了解决多变量函数的极小解问题，它的基本思想是构造一个辅助函数，即填充函数（有些学者也在此基础上提出了类似的另一些辅助函数，例如文献[1]的 F-C 函数），这个函数在目标函数 $f(x)$ 的初始极小点 x_1^* 处取得极大值，在比 $f(x)$ 的极小点高的任何盆域[2] 里没有极小点或鞍点；但在比 $f(x)$ 的极小点低的盆域里一定存在极小点或鞍点，最早由很多学者[2-12] 提出的许多填充函数有含有两个参数的、一个参数的，很多由于参数的选择比较困难和麻烦，比如 Ge[2,3] 给出的填充函数由于有两个参数需要调整使得填充函数的算法效率降低，又由于因子 $e^{-\frac{\|x-x^*\|^2}{\rho^2}}$ 的存在，当 $\|x-x^*\|^2$ 很大而 ρ^2 很小时，$P(x,x^*,r,p)$ 和 $\nabla P(x,x^*,r,p)$ 接近于 0 和零向量，可能找到假的平稳点或者丢失目标函数的极值点，求得填充函数的极小点的算法也难以实现。在此，文中给出了一种比较简单的填充函数，函数中只包含因子 arctan(·)，由于它良好的性质，使其算法的效果较好，效率比较高。

1 基本概念

文中主要考虑无约束优化问题。

$$(P_0)：\min_{x \in R^n} f(x) \tag{1}$$

假设条件如下：

收稿日期：2011-12-04；**修回日期**：2012-03-09

作者简介：姚桂霞（1988-），女，甘肃庆阳人，硕士研究生，研究方向为全局优化理论与算法；叶仲泉，教授，博士，研究方向为最优化理论与算法、控制论、人工神经网络。

(H_1) $f(x)$ 在 R^n 上是连续可微的；

(H_2) $f(x)$ 的极小点的个数可以有无穷多个，但是它的极小值应该是有限个；记 Y 为问题 (P_0) 的所有极小点的集合，则 $F=\{f(x)\mid x\in Y\}$ 是有限集。

(H_3) $f(x)$ 是强制性函数，即 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}f(x)=+\infty$ 则问题 (P_0) 等价于

$$(P):\min_{x\in\Omega}f(x) \tag{2}$$

其中 $\Omega\subseteq R^n$ 是有界闭域。

定义1[5]　域 $B^*\subset\Omega$ 称为问题 (P_0) 的关于一个局部极小点 x^* 的G-盆谷，具有如下性质：

(1) $x^*\in B^*$，且对于任意的 $x\in B^*$，$f(x)\geqslant f(x^*)$ 成立；

(2) $\bar{x}\in B^*$ 是问题 (P_0) 的局部极小点当且仅当 $f(\bar{x})=f(x^*)$。

定义2[4]　设 x^1 和 x^2 是 $f(x)$ 的两个局部极小点。如果 $f(x^2)\geqslant f(x^1)$，则称局部极小点 x^2 高于局部极小点 x^1，或局部极小点 x^1 低于局部极小点 x^2。如果 $f(x^2)=f(x^1)$，则称局部极小点 x^1 和 x^2 是同样高度的。

设 x^* 是问题 (P_0) 的一个局部极小点，B^* 是 x^* 的一个G-盆谷，L 是问题 (P_0) 的低于 x^* 所有局部极小点的集合，即

$$L(x^*)=\{x\in Y\mid f(x)<f(x^*)\} \tag{3}$$

定义3[5]　函数 $P(x,x^*)$ 称为问题 (P_0) 在极小点 x^* 处的填充函数，函数满足如下性质：

(1) x^* 是 $P(x,x^*)$ 的一个严格局部极大点；

(2) 对于任意 x 满足 $f(x)\geqslant f(x^*)$，且 $x\neq x^*$，x 不是函数 $P(x,x^*)$ 极值点或鞍点，即 $\nabla P(x,x^*)\neq 0$；

(3) 如果 x^* 不是问题 (P_0) 的全局极小点，即 $L(x^*)\neq\varnothing$，则对任意的 $\bar{x}\in L(x^*)$，$\bar{x}$ 是 $P(x,x^*)$ 的局部极小点，而且进一步满足 $P(\bar{x},x^*)<P(x^*,x^*)$，且对于任意的 $x\in\partial\Omega$，都有 $P(\bar{x},x^*)<P(x,x^*)$，其中 $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界；

(4) 对任意的 $x_1,x_2\in\Omega$，满足 $f(x_1)\geqslant f(x^*)$，$f(x_2)\geqslant f(x^*)$，则 $\|x_2-x^*\|>(\geqslant)\|x_1-x^*\|$ 当且仅当 $P(x_2,x^*)<(\leqslant)P(x_1,x^*)$。

2　一类填充函数

针对问题 (P_0)，设 x^* 是当前局部极小点，构造填充函数如下：

$$H(x,x^*)=-q\{\arctan\|x-x^*\|^2\cdot\varphi_r(f(x)-f(x^*))-\arctan[\min(1,1+\frac{f(x)-f(x^*)}{q})]\} \tag{4}$$

其中

$$\varphi_r(f(x)-f(x^*))=\begin{cases}1 & f(x)-f(x^*)\geqslant 0\\ \frac{1}{r}[f(x)-f(x^*)]+1 & -r<f(x)-f(x^*)<0\\ 0 & f(x)-f(x^*)\leqslant -r\end{cases} \tag{5}$$

$q>0$，$r>0$ 是参数，设 $S_1=\{x\mid f(x)>f(x^*)\}$，$S_2=\{x\mid f(x)<f(x^*)\}$ 且 $\beta_0=\min\limits_{\substack{y_1,y_2\in F\\ y_1\neq y_2}}|y_1-y_2|$。

下面用几个定理说明 $H(x,x^*)$ 是满足定义3的一类填充函数。

定理1　对 $\forall q>0,r>0$，若 x^* 是 $f(x)$ 的局部极小点，则 x^* 是 $H(x,x^*)$ 的一个严格的极大值点。

证：因为 $H(x^*,x^*)=q\arctan 1=\frac{\pi}{4}q$，又 $\exists\delta>0$，对 $\forall x\in N^0(x^*,\delta)\cap S_1$，有 $f(x)>f(x^*)$，则

$$H(x,x^*)=-q[\arctan\|x-x^*\|^2-\frac{\pi}{4}]=\frac{\pi}{4}q-q\arctan\|x-x^*\|^2<H(x^*,x^*)$$

所以，对 $\forall x\in N^0(x^*,\delta)\cap S_1$，当 $x\neq x^*$ 时，x^* 是 $H(x,x^*)$ 的一个严格极大值点，$\forall q>0,r>0$。

证毕

对 $\forall x\in\Omega$，定义 $d(x)=x-x^*$。

定理2　$f(x)$ 是 R^n 上的连续可微函数，对 $\forall x\in S_1$ 且 $x\neq x^*$，x 不是 $H(x,x^*)$ 的稳定点，且对 $\forall q>0$，$r>0$，$\nabla^T H(x,x^*)\cdot d(x)<0$。

证明：$H(x,x^*)=-q\{\arctan\|x-x^*\|^2\cdot\varphi_r(f(x)-f(x^*))-\arctan[\min(1,1+\frac{f(x)-f(x^*)}{q})]\}$

因为 $x\in S_1$，即 $f(x)>f(x^*)$，所以 $H(x,x^*)=-q[\arctan\|x-x^*\|^2-\frac{\pi}{4}]$，$\nabla H(x,x^*)=-q\cdot\frac{2(x-x^*)}{1+\|x-x^*\|^4}$

因为 $x\neq x^*$，$q>0$，所以 $\nabla H(x,x^*)\neq 0$，即 x^* 不是 $H(x,x^*)$ 的稳定点，且

$$\nabla^T H(x,x^*)\cdot d(x)=-q\cdot\frac{2\|x-x^*\|^2}{1+\|x-x^*\|^4}<0$$

定理3　若 $f(x)$ 是连续可微的，且满足强制性条件，即当 $\|x\|\to\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$。若 x^* 不是原问题的最小点，即 $L(x^*)\neq\varnothing$，则对 $\forall\bar{x}\in L(x^*)$，$\forall q>0$，$\bar{x}$ 是 $H(x,x^*)$ 的一个局部极小点，且满足 $H(\bar{x},x^*)<H(x^*,x^*)$，$H(\bar{x},x^*)<H(x,x^*)$，$\forall x\in\partial\Omega$，当 $r\leqslant\frac{\beta_0}{2}$ 时。

证明：因为 $\beta_0=\min\limits_{\substack{y_1,y_2\in F\\ y_1\neq y_2}}|y_1-y_2|$ 且 $L(x^*)\neq\varnothing$，则

对 $\forall \bar{x} \in L(x^*)$，有 $f(x^*) - f(\bar{x}) \geq \beta_0$，则 $f(\bar{x}) - f(x^*) \leq -\beta_0 \leq -2r < -r$，因为 $f(x)$ 连续，则 $\exists \bar{x}$ 的邻域 $N(\bar{x},\delta_0) = \{x \in R^n \mid \|x - \bar{x}\| < \delta_0\}$，对于 $\forall x \in N(\bar{x},\delta_0)$，有 $f(x) - f(x^*) < -r$，因此有 $\varphi_r(f(x) - f(x^*)) = 0, \forall x \in N(\bar{x},\delta_0)$；又因为 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 的局部极小点，则 $\exists \bar{x}$ 的邻域 $N(\bar{x},\delta_1) = \{x \in R^n \mid \|x - \bar{x}\| < \delta_1\}$，则对 $\forall x \in N(\bar{x},\delta_1)$，有 $f(x) > f(\bar{x})$，取 $\delta = \min\{\delta_0,\delta_1\}$，则对于 $\forall x \in N(\bar{x},\delta)$，有

$$H(x,x^*) = q \cdot \arctan(1 + \frac{f(x) - f(x^*)}{q}) \geq q \cdot \arctan(1 + \frac{f(\bar{x}) - f(x^*)}{q}) = H(\bar{x},x^*)$$

则 $\bar{x}$ 是 $H(x,x^*)$ 的一个局部极小点，且

$$H(\bar{x},x^*) = q \cdot \arctan(1 + \frac{f(\bar{x}) - f(x^*)}{q}) < q \cdot \arctan 1 = \frac{\pi}{4}q = H(x^*,x^*)$$

定理 4　对 $\forall\ x_1,x_2 \in \Omega$，满足 $f(x_1) \geq f(x^*)$，$f(x_2) \geq f(x^*)$；$\|x_2 - x^*\| > (\geq) \|x_1 - x^*\|$，当且仅当 $H(x_2,x^*) < (\leq) H(x_1,x^*)$，$\forall q > 0, r > 0$。

证明：对 $\forall\ x_1,x_2 \in \Omega$，因为 $f(x_1) \geq f(x^*)$，$f(x_2) \geq f(x^*)$，则有

$$H(x_1,x^*) = -q[\arctan \|x_1 - x^*\|^2 - \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{4}q - q \cdot \arctan \|x_1 - x^*\|^2$$

$$H(x_2,x^*) = -q[\arctan \|x_2 - x^*\|^2 - \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{4}q - q \cdot \arctan \|x_2 - x^*\|^2$$

又因为 $\|x_2 - x^*\| > (\geq) \|x_1 - x^*\| \Leftrightarrow \arctan \|x_2 - x^*\|^2 > (\geq) \arctan \|x_1 - x^*\|^2 \Leftrightarrow H(x_2,x^*) < (\leq) H(x_1,x^*)$。

由以上这几个定理可以得知，式(4)满足填充函数的定义3，所以是填充函数。

3 填充函数的算法

步1，选取充分小的正数 $\mu > 0, \varepsilon > 0 (\varepsilon < \mu)$ 作为最小化问题的终止参数，选择 $M > 0$ 为参数 q 的上界，取 $k_0 \geq 2n$，其中 n 为变量的维数；取单位向量 $\{e_i\}$，$i = 1,\cdots,k_0$，使得 e_i 在单位球 $B = \{x \in R^n \mid \|x\| = 1\}$ 上，给定初始点 $x_1^0 \in \Omega$，初始值 $q_0 \geq 1$ 且 $r_0 \leq 1, k := 1$；

步2，从 x_k^0 处开始用某一搜索方法寻找原问题 $\min\limits_{x \in \Omega} f(x)$ 的局部极小点 x_k^*，取一个正数 $\delta_0 > 0$，让 $\delta := \delta_0, i := 1$；

步3，令 $\overline{x_k^*} = x_k^* + \delta e_i$，若 $f(\overline{x_k^*}) < f(x_k^*)$，则 $x_{k+1}^0 := \overline{x_k^*}$，$k := k + 1$，转步2；否则，转步4；

步4，构造填充函数 $H(x,x^*) = -q\{\arctan \|x - x^*\|^2 \cdot \varphi_r(f(x) - f(x^*)) - \arctan[\min(1, 1 + \frac{f(x) - f(x^*)}{q})]\}$

从初始点 $\overline{x_k^*}$ 开始用局部搜索方法解问题 $\min\limits_{x \in \Omega} H(x,x^*)$。若此问题的解在 $\partial\Omega$ 上得到，则转步5；否则，若以下条件之一在某一点 $y_k^* \in \Omega$ 上成立：

(1) $(y_k^* - x_k^*)^T \nabla H(y_k^*,x_k^*) \geq 0$；

(2) $f(y_k^*) < f(x_k^*)$；

(3) $\|\nabla H(y_k^*,x_k^*)\| \leq \varepsilon$。

则令 $x_{k+1}^0 := y_k^*$，$k := k + 1$，转步2；否则，在 Ω 上继续极小化 $H(x,x^*)$；

步5，若 $q < M$，则增加 q（例：让 $q := 10q$），转步3，否则让 $q := q_0$，转步6；

步6，若 $\delta > \mu$，则减少 δ（例：让 $\delta := \frac{\delta}{2}$），让 $q := q_0$，转步3；否则，让 $q := q_0, \delta := \delta_0$，转步7；

步7，若 $i < k_0$，则 $i := i + 1$，转步2；否则，转步8；

步8，若 $r > \mu$，则减少 r（例：让 $r := \frac{r}{10}$），让 $i := 1, q := q_0, \delta := \delta_0$，转步3；否则停止，$x_k^*$ 就是问题的全局极小解。

4 算　例

使用 Matlab(R2009a)软件进行计算，使用 Fmincon 函数求 $f(x)$ 的极值，使用 Fminunc 函数求 $H(x,x^*)$ 的极值。

算例1　6-Hump back camel($n = 2$)函数：

$$f(x) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + \frac{1}{3}x_1^6 - x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4$$

$$-3 \leq x_1,x_2 \leq 3$$

文献[2]中 Ge 给出的全局最优解为 $x^* = (0.0898, 0.7127)$ 或 $(-0.0898, -0.7127)$，全局最优值为 $f(x^*) = -1.0316$，但是在利用文中的算法下通过一次迭代得到的全局最优解为 $x^* = (-0.0898, -0.7129)$，目标函数值为 $f(x^*) = -1.0316$，与 Ge 的一致。

算例2　Rastrigin($n = 2$)函数：

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos(18x_1) - \cos(18x_2)$$

$$-1 \leq x_1,x_2 \leq 1$$

Yang 等给出的全局最优解为 $x^* = (0.0000, 0.0000)$，最优值为 $f(x^*) = -2.0000$，而利用文中算法

得到的全局最优解为 $x^* = (1.0e-005*0.9583, 1.0e-005*0.9583)$，最优值为 $f(x^*) = -2.0000$，与 Yang 等的一致，算法是有效的。

算例 3　Treccanifunction ($n=2$)：

$f(x) = x_1^4 + 4x_1^3 + 4x_1^2 + x_2^2 \quad -3 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 3$

文献[6]给出的全局最小解为 $x^* = (0.00000466, 0.00000000)^T$，全局最小值为 $f(x^*) = 8.67710185e^{-11}$，而利用文中算法得到的全局最小解为 $x^* = 1.0e-004*(0.0960, 0.4020)$，全局最小值 $f(x^*) = 1.9857e-009$，与文献中的结果一致。

5　结束语

文中基于全局优化问题的 (P_0) : $\min_{x \in R^n} f(x)$，提出了一类求解其最小值的填充函数法，讨论并证明了该函数的填充性质和其他一些分析性质，并在其理论基础上为其设计了算法。理论分析和数值试验表明，该函数是可行的，算法是有效的，收敛速度比较快，精度相对比较高。

参考文献：

[1]　杨军君，叶仲泉. 一类求解全局优化问题的 F-C 函数法[J]. 计算机技术与发展，2009，19(7)：124-126.

[2]　Ge R P, Qin Y F. A class of filled functions for finding a global minimizers of a function of several variables[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1987, 54 (2): 241-252.

[3]　Ge R. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables[J]. Math. Program, 1990, 46 (1-3): 191-204.

[4]　Zhang L S, Ng C K, Li Duan, et al. A new filed function method for global optimization[J]. Global Optimization, 2004, 28 (1): 17-43.

[5]　Wu Z Y, Lee H W J, Zhang L S, et al. A novel filled function method and quasi-filled function method for global optimization[J]. Comput. Optim. Appl., 2005, 34(2): 249-272.

[6]　Wang C J, Yang Y J, Li J. A new filled function method for unconstrained global optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 225(1): 68-79.

[7]　Lin Youjiang, Yang Yongjian. Filled function method for nonlinear equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 234(3): 695-702.

[8]　刘　津，叶仲泉. 一类新的寻求全局最优解的填充函数[J]. 计算机技术与发展，2010，20(6)：36-38.

[9]　杨军君，叶仲泉. 求解全局优化问题的填充函数算法[J]. 运筹与管理，2011，20(1)：8-11.

[10]　贺素香，陈未来. 一个求解无约束优化问题的填充函数算法[J]. 浙江大学学报(理学版)，2011，38(2)：144-149.

[11]　张玉芬，张群峰，王永军，等. 用于全局优化的一种新辅助函数及其性质[J]. 河北大学学报(自然科学版)，2011，31(1)：7-11.

[12]　梁玉梅，李铭明，迟东璇. 全局优化问题的一个单参数填充函数方法[J]. 运筹学学报，2009，13(4)：102-108.

(上接第 95 页)

参考文献：

[1]　尹　璐，何晓光，毋立芳，等. 多用途人脸识别系统的设计与实现[J]. 计算机工程与应用，2007，43(20)：225-228.

[2]　梁路宏，艾海舟，徐光佑，等. 人脸检测研究综述[J]. 计算机学报，2002，23(5)：449-458.

[3]　Yang Jie, Lu Weier, Waibel A. Skin color modeling and adaptation[C]//Proc of the 3rd Asian Conference on Computer Vision. London: Spring-Verlag, 1998: 687-694.

[4]　Craw I, Ellis H, Lishman J. Automatic Extraction of Face Features[J]. Pattern Recognition Letters, 1987, 5(2): 183-187.

[5]　廖学锋，陈雷霆，闵　帆，等. 基于粗糙集与肤色模型的人眼定位算法[J]. 计算机应用，2007，27(S1)：125-126.

[6]　梁路宏，艾海舟，何克忠. 基于多模板匹配的单人脸检测[J]. 中国图象图形学报，1999，4(10)：825-830.

[7]　陈茂林，戚飞虎. 自组织的隐马尔可夫模型的人脸检测研究[J]. 计算机学报，2002，25 (11)：1165-1169.

[8]　Li J, Najmi A, Gray R M. Image classification by a two dimensional hidden Markov model[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(2): 517-533.

[9]　Karungaru S, Fukumi M, Akamatsu N. Human Face Detection in Visual Scenes Using Neural Networks[J]. Transaction of Institute of Electrical Engineers of Japan (IEEJ), 2002, 122c: 995-1000.

[10]　Cauwenberghs G, Poggio T. Incremental and decremental support vector machine learning[C]//Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge MA: MIT Press, 2000: 409-415.

[11]　武　勃，黄　畅，艾海舟，等. 基于连续 Adaboost 的多视角人脸检测[J]. 计算机研究与发展，2005，42(9)：1612-1621.

[12]　王　晶，杨　煜. 基于边缘方向直方图的 Adaboost 人脸检测[J]. 计算机技术与发展，2007，17(12)：5-7.

[13]　尹　飞，冯大政. 基于 PCA 算法的人脸识别[J]. 计算机技术与发展，2008，18(10)：22-24.

[14]　Jain A K. Face Detection in Color Image[J]. IEEE Trans on PAML, 2002, 23(5): 696-786.

[15]　Meynet J. Fast face detection using adaboost pattern recognition[EB/OL]. 2003-07-16. http://ftp.ut-cluj.ro/pub/users/nedevschi/AV/References/B3.Face%20 detection/Meynet 2003-923. pdf.

[16]　Vezhnevets V, Sazonov V, Andreeva A. A Survey on Pixel-based Skin Color Detection Techniques[C]//Proceedings of Graphicon-2003. [s. l.]: [s. n.], 2003: 85-92.

基于改进遗传算法的 QoS 感知 Web 服务组合

作者： 马小洁， 王晓军
作者单位： 南京邮电大学计算机学院,江苏南京210003
刊名： 计算机技术与发展
英文刊名： Computer Technology and Development
年，卷(期)： 2012(8)

参考文献(12条)

1.杨军君;叶仲泉 一类求解全局优化问题的F-C函数法[期刊论文]-计算机技术与发展 2009(07)

2.Ge R P;Qin Y F A class of filled functions for finding a global minimizers of a function of several variables 1987(02)

3.Ge R A filled function method for finding a global minimizei of a function of several variables 1990(1-3)

4.Zhang L S;Ng C K;Li Duan A new filed function method for global optimization 2004(01)

5.Wu Z Y;Lee H W J;Zhang L S A novel filled function method and quasi-filled function method for global optimization 2005(02)

6.Wang C J;Yang Y J;Li J A new filled function method for unconstrained global optimization[外文期刊] 2009(01)

7.Lin Youjiang;Yang Yongjian Filled function method for nonlinear equations[外文期刊] 2010(03)

8.刘津;叶仲泉 一类新的寻求全局最优解的填充函数[期刊论文]-计算机技术与发展 2010(06)

9.杨军君;叶仲泉 求解全局优化问题的填充函数算法[期刊论文]-运筹与管理 2011(01)

10.贺素香;陈未来 一个求解无约束优化问题的填充函数算法[期刊论文]-浙江大学学报（理学版） 2011(02)

11.张玉芬;张群峰;王永军 用于全局优化的一种新辅助函数及其性质[期刊论文]-河北大学学报(自然科学版) 2011(01)

12.梁玉梅;李铭明;迟东璇 全局优化问题的一个单参数填充函数方法[期刊论文]-运筹学学报 2009(04)