博弈论在数学综合素质培养机制中的应用

曹黎侠
(西安工业大学 理学院,陕西 西安 710032)

摘 要:根据大学生数学综合素质培养机制的研究现状,创建了数学综合素质培养机制的“理论与应用均衡模型”,为高校数学综合素质培养模式提供科学的定量化的方法。运用博弈均衡理论,建立培养机制模型并给出纯策略纳什均衡解。从定量的角度确定了“理论与应用均衡”的培养机制中理论课与应用课所占课时的最佳比例,以及要使学生的收益最大,学生应该付出的学习时间。通过算法示例及对博弈模型结果的分析,说明了博弈模型的有效性和可操作性。

关键词:博弈论;培养机制;纳什均衡;效益函数

中图分类号:O225 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2012)02-0189-03

Game Theory Application in Mathematical Mode of Overall Quality of Cultivation

CAO Li-xia
(College of Science, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China)

Abstract: To provide a scientific quantitative approach, according to the research status of overall quality of mathematical training mode, creat a mathematical model of the overall quality of training, "equilibrium theory and applications". Using game's equilibrium theory creat game model and give the pure strategy Nash equilibrium. From a quantitative point of groundbreaking to determine the best proportion of hours about the theory and application of course in the "balance of theory and application" of the training mode, and to make the biggest gains of students, the students should pay for learning time. Through the algorithm example and analysis of the results of the game model, illustrate the effectiveness of the game model and operability.

Key words: game theory; mode of cultivation; Nash equilibrium; benefit function

0 引 言

大学生数学综合素质是指数学基础理论与应用理论解决问题能力的综合。具体的说,表现在学生抽取事物“数”和“形”属性的敏感性、数理逻辑推理的能力、数学的语言表达能力、数学建模的能力和数学想象力这五个方面[1,2]。

关于大学生数学综合素质培养机制的研究,国内外学者一直进行着与时俱进地探索,也有不少的研究成果。在文献[2]中给出了数学理论教育兼顾应用教育的培养机制,文献[3]给出了“3 + 1”的培养机制,这些成果都只是从定性的角度指出了大学数学课程教育要在理论教学的同时,适度渗透一些理论的应用教学,才会更好地推进学生数学综合素质的提升。那么到底渗透多少,或者说数学课程教学中理论教学和应用教学的课时如何分配,才能最大限度地达到提升大学生数学综合素质的目的?文中将运用无限策略下纳什均衡的相关理论,解决这个问题。即从定量的角度构建出学生数学综合素质培养机制的一种均衡模型,希望为大学数学课程教学中理论与应用课时的分配提供一些有益的借鉴。

1 博弈论简介

博弈论(game theory)[4~6]就是研究和帮助在相互依存情况中,理性人应当如何做决策使得自己利益极大化的数学理论。它源于历史上一些颇为有趣的游戏,也是一门学问很深的理论。目前已经广泛应用于政治、经济、旅游、国际关系等诸多领域,因此博弈理论及其应用也日益受到人们的关注与重视。

常见的博弈分类包含以下三种划分方式:按照参与人的先后顺序,可以划分为静态博弈(static game)和动态博弈(dynamic game);按照参与人对其他参与人的了解程度,可以划分为完全信息博弈和不完全信息博弈;按照参与人之间是否合作,可以划分为合作博

收稿日期:2011-07-31;**修回日期**:2011-11-02
基金项目:陕西省教育科学计划项目自然专项(09JK480);西安工业大学教学改革研究项目(10JGY28)
作者简介:曹黎侠(1971-),女,陕西西安人,副教授,研究方向为运筹学与控制论、决策分析及优化算法等。

弈和非合作博弈。因此，非合作博弈包括完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈四种类型。

本模型考虑的是完全信息下的静态博弈，它含有三要素[7~9]：

局中人（Players），假定都是理性的；

策略集（Strategies），局中人可能采取的策略集合；

支付函数（Payoffs），对于任意一个策略，带给局中人的收益，可以是损益函数，也可以是效益函数。

2 数学综合素质培养机制的博弈模型

2.1 模型成立的假设条件

本模型中博弈规则是既定的、公开的、透明的，博弈双方的策略及其在不同策略下的支付函数是一种公共知识，即双方行为选择是一个完全信息静态博弈。

为了探讨问题方便，引入以下的变量及假设：

(1) ω：理论课与应用课相比备课的难度系数，$0<\omega\leqslant 1$；ω 是由专家根据该课程的理论教学与应用教学的实际状况，采用模糊综合评价法确定的一个常量；

(2) p：学生群体中 no clever and no dull 学生的概率，p 是由学生群体确定的一个常量；

(3) x：理论课占课程课时的比例，为决策变量；

$1-x$：应用课占课程课时的比例；

(4) y：每单位课时学生付出的学习时间，为决策变量；

(5) X：是一个随机变量，表示学生的智力状况，其分布假定为

X	clever	no clever and no dull	dull
p_{Xi}	$p_{X1}=\frac{1-p}{2}$	$p_{X2}=p$	$p_{X3}=\frac{1-p}{2}$

(6) Y：表示学生付出 y 个单位学习时间获得的收益，是随机变量 X 的函数，且

$$Y=\begin{cases}2\sqrt{y} & X\in \text{clever}\\ \sqrt{y} & X\in \textit{no clever no dull}\\ \frac{\sqrt{y}}{2} & X\in \text{dull}\end{cases} \tag{1}$$

(7) t：教师的工作年限；

(8) 假定所有教师均无知识与能力的区别，只有工作年限的差别；设 $g(t)$ 表示教师准备每单位的课时需要付出的劳动单位，且

$$g(t)=\begin{cases}3 & t\leqslant 3\\ 2 & 3<t\leqslant 5\\ 1 & t>5\end{cases} \tag{2}$$

T	$t\leqslant 3$	$3<t\leqslant 5$	$t>5$
p_{Ti}	p_{T1}	p_{T2}	p_{T3}

(9) T：由 t 确定的随机变量，其分布为已知

则在上述假定条件下，每单位课时教师的平均付出和学生的平均收益分别为

$$E(g(t))=\sum_{i=1}^{3}g(t)\cdot p_{Ti}=3p_{T1}+2p_{T2}+p_{T3} \tag{3}$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{3}Y\cdot p_{Xi}=\frac{1}{4}(5-p)\sqrt{y} \tag{4}$$

2.2 博弈模型的创建与求解

假定在教学中，教师和学生作为理性的局中人，都以追求自身利益最大化为目标。教师的策略集是由理论课教学的比例 x 构成，$0<x\leqslant 1$；教师进行每单位课时的教学学生付出 y 个单位的学习时间，$0<y<+\infty$ 构成了学生的策略集。

对教师而言，需要考虑学生付出的学习时间 y 来确定理论课教学的比例 x 的值，使得教师的收益最大；对学生来讲，在教师进行理论课教学比例为 x 时，需要确定付出多大的学习时间 y，使得自己的收益最大。

通过对学生的抽样，利用回归分析的方法确定了学生每付出 y 个单位的学习时间，会取得 $\sqrt{y}$ 的收益，同时又因付出了劳动而损益，因此学生的效益函数为

$$g(x,y)=\sqrt{y}-(\omega x^2+(1-x)^2)y \tag{5}$$

教师进行每单位的教学，因学生有所获而收益，自身付出劳动而损益，因此教师的效益函数为

$$f(x,y)=E(Y)-(\omega x^2+(1-x)^2)E(g(t)) \tag{6}$$

这就构建了无限策略下的完全信息静态博弈模型。

显然，式(5) 对于任何 x 都是 y 的拟凹连续函数，式(6) 对于任何 y 都是 x 的拟凹连续函数，则该博弈模型有纯策略纳什均衡解[10~12]。

所以教师与学生所追求的最大收益可以表示成

$$\max_{0<x\leqslant 1}f(x,y)=\frac{1}{4}(5-p)\sqrt{y}-(\omega x^2+(1-x)^2)(3p_{T1}+2p_{T2}+p_{T3})$$

$$\max_{0<y<+\infty}g(x,y)=\sqrt{y}-(\omega x^2+(1-x)^2)y \tag{7}$$

令

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(-2\omega x+2(1-x))\cdot(3p_{T1}+2p_{T2}+p_{T3})=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}-(\omega x^2+(1-x)^2)=0,$$

得

$$\begin{cases}x^*=\dfrac{1}{\omega+1}\\ y^*=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{\omega}\right)^2\end{cases} \tag{8}$$

即 (x^*,y^*) 组成该博弈的平衡局势，即纯策略纳什均衡点；

在纳什均衡点(x^*,y^*),教师和学生的最大收益分别为

$$\frac{1}{4}(5-p)\sqrt{y^*}-(\omega(x^*)^2+(1-x^*)^2)(3p_{T1}+2p_{T2}+p_{T3}) \tag{9}$$

$$\sqrt{y^*}-(\omega(x^*)^2+(1-x^*)^2)y^* \tag{10}$$

2.3 算法示例

通过对某高校某门数学课程及上课的师生进行调研,得到以下数据:

$$\omega=0.7,p=\frac{1}{2},p_{T1}=\frac{1}{4},p_{T2}=\frac{3}{8},p_{T3}=\frac{3}{8}$$

将这些数据代入式(8)~(10),得博弈的纳什均衡点(0.588,1.474);教师和学生的最大收益分别为0.594,0.607。

即该门课程教师需按照0.588的比率进行理论教学,以0.412的比率进行应用教学,将会取得最大收益为0.594;每单位课时学生需要付出1.474个单位的学习时间,将会得到最大收益为0.607。

3 模型的博弈结果分析

由博弈结果,可以得出以下结论:

(1) ω越大,说明理论课备课的难度系数越大,此时教师在理论课时选择时要小一些;学生付出的学习时间相对也较少;

(2) 由于$0<\omega\leqslant 1$,故$0.5\leqslant x^*<1,y^*\geqslant 1$,说明理论课的课时至少保证在50%,对于每单位课时的教学学生的学习时间不应小于一个单位,是提高学生数学综合素质的前提条件;

(3) 模型中得到y^*和学生的最大收益$\sqrt{y^*}-(\omega(x^*)^2+(1-x^*)^2)y^*$是针对no clever and no dull群体而言;按照相同的方法可得clever群体及dull的群体的均衡点分别为$(x^*,4y^*)$、$(x^*,\frac{y^*}{4})$;即每单位课时,他们分别需要付出no clever and no dull群体4倍和1/4倍的学习时间,所得收益大约分别是no clever and no dull群体收益的2倍和1/2倍。

由式(8)理论课与应用课相比备课的难度系数ω是影响理论课时的唯一因素。

当ω确定,博弈模型的纳什均衡解随之确定,教师与学生的收益达到最大;

当ω确定,no clever and no dull群体的概率p越小、教师的工作年限t越长,教师的收益值越大。

4 结束语

关于大学生数学综合素质培养机制的研究,国内外更多的成果都侧重于"理论教育兼顾应用的培养机制",遗憾地是这些成果仅从定性的角度论证了这种机制的效果和优点,从而缺乏可操作性。

文中创建了大学生数学综合素质培养机制的"理论教育与应用均衡模型",并运用无限策略下纳什均衡的相关理论给出了模型的纯策略纳什均衡解。从而开创性地从定量的角度给出了"理论教育兼顾应用的培养机制"中理论课与应用课所占的最佳比例,以及学生应该付出多少单位的学习时间才能使得自身的收益最大。

通过算法示例及对博弈模型结果的分析,说明了该博弈模型的有效性和可操作性。

参考文献:

[1] 张 红.高职财务管理专业应用型人才培养的策略[J].教育探索,2008(12):78-79.

[2] 吴 莉.数学建模:大学生数学综合素质的核心[J].南京林业大学学报(人文社会科学版),2007,7(2):109-111.

[3] 王川龙,宋儒瑛.论高师院校数学课程"3 + 1"培养模式[J].太原师范学院学报(社会科学版),2007,6(1):161-162.

[4] Kuhn H W.博弈论经典[M].韩 松,刘世军,译.北京:中国人民大学出版社,2005.

[5] Nash J. The Bargaining Problem[J]. Econometric,1950,18(2):155-162.

[6] 阳剑兰,马 军.高校人才引进的博弈分析[J].南华大学学报(社会科学版),2006,7(4):40-42.

[7] 汪贤裕,肖玉明.博弈论及其应用[M].北京:科学出版社,2008:17-24.

[8] 彭淑梅.社会均衡存在定理与NASH均衡存在定理及其之间的关系[D].北京:首都师范大学,2008.

[9] Lemke C,Howson J. Equibrium Points of Bimatrix Games[J]. Journal of Society for Industrial and Applied Mathematics,1964(12):413-423.

[10] 杨 莉.博弈论中反应函数法的改进[J].统计与决策,2010(9):152-154.

[11] Glicksberg L L. A Further Generalization if the Kakutani Fixed Point Theory with Application to Nash Equilibrium Point[J]. Proc. Amer. Math. Soc.,1952(3):170-174.

[12] Govindan S, Wikon R. A Global Newton Method for Computing Nash Equilibria[J]. Journal of Economic Theory,2003,110(1):65-86.