第21卷 第12期
2011年12月

计算机技术与发展
COMPUTER TECHNOLOGY AND DEVELOPMENT

Vol. 21 No. 12
Dec. 2011

求解网络最大流问题的标号算法

赵礼峰，白 睿，宋常城
（南京邮电大学 理学院，江苏 南京 210003）

摘 要：给出了一种新的求解网络流问题的标号算法，对每个顶点进行标号，顶点有几个入弧，即有几个标号，每次在选择路径时先选取只有一个标号的路径，当所有单标号的路径走完时，再按照弧容量较大且最短的路径选择增广链。通过对Ford-Fulkerson 标号算法进行改进，使得该算法容易理解，且又避免了 Ford-Fulkerson 标号算法在求解网络最大流问题时需经过多次的调整与标号，从而大大提高了求解最大流执行的效率。该算法通过实例给出了具体算法步骤并且表明了算法的实用性。

关键词：最大流；Ford-Fulkerson 标号算法；增广链；标号

中图分类号：TP301.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-629X(2011)12-0113-03

Labeling Algorithm to Solve Maximum Network Flow Problem

ZHAO Li-feng, BAI Rui, SONG Chang-cheng
(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: It provides a new way-labeling algorithm to solve network flow. Every vertex is labeled and vertex has the same number in arc as grades. Choose the way that has a grade. After every way that has only a grade, choose the way that has bigger arc capacity and shorter path. The algorithm is easy to understand and avoids the shortcomings of several labeling and adjusting process through improving Ford-Fulkerson labeling algorithm. The algorithm improves efficiency to solve the maximum network flow. The algorithm gives specific steps and manifests the practices of the algorithm through example.

Key words: maximum network flow; Ford-Fulkerson labeling algorithm; augmented chain; labeling

0 引 言

在现实生活中，存在着大量的“流”的问题，计算机技术和网络技术的迅速发展使得网络最大流问题在通信、物理、电力等科学领域都得到了广泛的应用。自最大流问题被提出近五十年来，许多学者对其进行了大量深入的研究，并提出了一系列求解最大流的算法[1~9]。

最大流主要有两类算法：一类是在剩余网络的基础上寻找增广链进行增广的算法，如 Ford-Fulkerson 标号算法以及由 Dinic(1970)，Edmonds-Karp(1972)提出的最短增广链算法；另一类是基于 Karzanov(1974)提出的分层网络阻塞流算法，以及在 Karzanov 的基础上由 Goldberg 和 Tarjan(1986)改进的推进-重标号算法等[10]。尽管这些算法有很广泛的应用，但是也有自己的缺点，Ford-Fulkerson 算法思路主要有两个过程：一是标号过程，二是增流过程。标号过程用来寻找可增路，这个过程需要对每个顶点检查一次，即可找到一条可增路[1]。但是如果增广链选取的不恰当，则 Ford-Fulkerson 算法的计算量会变得很大，因此，增广链选取的任意性造成了 Ford-Fulkerson 算法不是好的算法。为了改进算法，减少其计算量，应该优化增广链的选取方法，排除选取增广链的任意性，在此基础上[11]由 Dinic(1970)，Edmonds 和 Karp(1972)独立地提出了改进 Ford-Fulkerson 算法的思想：每次都沿最短增广链进行增广[12]。但是计算时要在剩余网络的基础上进行计算，步骤较为繁琐。

近年来，很多学者在基础算法的基础上对最大流算法进行改进，如：通过引入极大一致链的概念提出了一种求解网络最大流问题的消链算法，该算法主要目的是为了寻找网络中的极大一致链，逐步进行调整所得到的极大一致链对网络，从而可以避免了标号算法的标号过程[13]；还有对 Ford-Fulkerson 算法标号法也可以进行改进，使得通过一次标号便可找到全部增广链，并同时增流即得最大流[14]。

文中通过对 Ford-Fulkerson 算法的改进，提出了一种新的求解网络最大流问题的方法，对每个顶点进行标号，顶点有几个入弧，即有几个标号，每次在选择

收稿日期：2011-05-16；**修回日期**：2011-08-20
基金项目：国家自然科学基金(61070234，61071167)
作者简介：赵礼峰(1959-)，男，安徽淮北人，教授，硕士研究生导师，研究方向为图论及其应用。

路径时先选取只有一个标号的路径，当所有单标号的路径走完时，再按照弧容量较大，且最短的路径选择增广链[15]。

1 问题的分析

1.1 基本概念

定义 1 有向网络 $N = (V,A,C)$，顶点集用 V 表示，有向边集用 A 表示，弧上的容量用 C 表示。

定义 2 网络最大流问题。

网络最大流问题应该满足以下条件：

(1)在网络中，只有一个始(起)点 v_s 和一个终点 v_t，如果同时存在几个始点或者几个终点，通过增加虚拟节点使得网络只有一个起点和一个终点；

(2)网络是流有方向的容量网络；

(3)在网络中每条弧都有一个权，它表示允许网络可以流过的最大值。若以 c_{ij} 表示由 V_i 到 V_j 的弧上可以流过的最大量，以 x_{ij} 表示弧上实际流过的流量，则存在 $0 \le x_{ij} \le c_{ij}$；

(4)网络中，除了起点和终点，对于其他的顶点，流入量的总和应该等于流出量的总和。

定义 3 最大容量弧。

设 N 中任一点 v_i，$N^+(v_i)$ 为 v_i 的出弧集合，其中 (v_i,v_j) 为 v_i 的一条容量最大的出弧，记为最大容量弧。

定义 4 最大容量链。

由最大容量弧构成的由发点至收点的弧。

定义 5 单标号增广链。

从 v_s 出发，寻找它的出弧 (v_s,v_i)，且 v_i 只有一个标号，寻找 $c(v_s,v_i)$ 最大的 (v_s,v_i)，继续寻找 v_i 的出邻点，且只有一个标号，直到 v_t。

1.2 基本定理

设 f 是容量网络 D 中可行流，则 f 是 D 的最大流当且仅当 D 中不存在 f 增广链[2]。

2 新算法思想及步骤

2.1 算法思想

在每个网络中，一个顶点可能有不止一个入弧，在 Ford-Fulkerson 算法中，每个顶点只有一个标号，文中对 Ford-Fulkerson 算法进行改进，顶点有几条入弧，即有几个标号，对每个顶点标号为(v_i, δ_{ij})。在选取路径时，先选取只有一个顶点的标号进行增广，当所有单标号的路径走完时，再按照弧容量较大，且最短的路径选择增广链。

2.2 算法步骤

Step1 标号。

(1) 对每个顶点进行标号，对始点 v_s 标号为 $(0,\infty)$，为已标号顶点，并把所有点标为未检查；

(2) 如果所有已标号顶点都已检查，转(3)；否则任取一个已标号未检查顶点，检查所有与其关联的弧，对 v_s 的所有出邻点标号为(v_s, δ_{si})，$\delta_{si} = c_{si}$；对 v_s 的所有出邻点 v_i 标号完毕后，找到 v_i 的所有出弧，并对其顶点进行标号为(v_s, δ_{ij})，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \min\{\delta_{si}, c_{ij}\}; & \text{当 } v_i \text{ 只有一条入弧} \\ c_{ij}; & \text{当 } v_i \text{ 有两条以上的入弧} \end{cases}$$；当所有与 v_i 关联的弧都已检查完毕后，令 v_i 为已检查，转(3)；

(3) 如果终点 v_t 得到标号，则标号结束。

Step2 寻找增广链。

从 v_s 出发，先寻找单标号增广链，如果没有单标号增广链则寻找最大容量链，则已经找到 f 的一条增广链，转 Step3；

Step3 修改标号。

在找到的增广链中，$\delta = \min\delta_{ij}$，将增广链中每个顶点的标号改为 $\delta_{ij}^* = \delta_{ij} - \delta$；当 $\delta_{ij}^* = 0$ 时，则弧 (v_i, v_j) 标记为 ||，此时，代表不存在从 v_i 到 v_j 的有向路径，转 Step4；

Step4 当不再存在从 v_s 到 v_t 的增广链时，结束，此时，最大流为 $f_{max} = \sum \delta_{ij}^*$。

3 数学模型

有一家石油公司，该公司有一个运输管道网络，利用此管道网络可以把石油从开采地运送到一些销售地。

若将此运输系统看作是一个始点为 v_s，终点为 v_t 的有向网络 $N = (V,A,C)$，这里每条弧 (v_i,v_j) 表示从 v_i 到 v_j 的运输线，弧上数字表示该管道可以通过的容量。如果想要得到最大石油运输量，就需要增加每条运输管道的石油运输量，于是，此问题可以归结为在有向网络 N 中求一个最大的 (v_s,v_t) 流。

4 举 例

求如图 1 所示的容量网络中 v_s 到 v_t 的网络最大流。

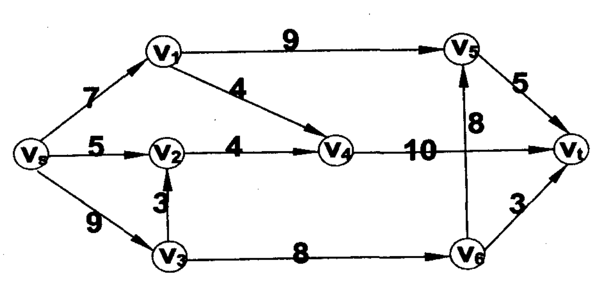

图 1 容量网络

解:

(1)如图2,对图1中每个顶点标号。

(2)找到第一条增广链为 $v_s-v_3-v_6-v_t$,修改增广链(黑线表示)中定点的标号,并标记||,其中 $\delta_1=\min\delta_{ij}=\{9,8,3\}=3$ 且将增广链中每个顶点的标号改为 $\delta_{ij}^*=\delta_{ij}-\delta$,如图3所示。

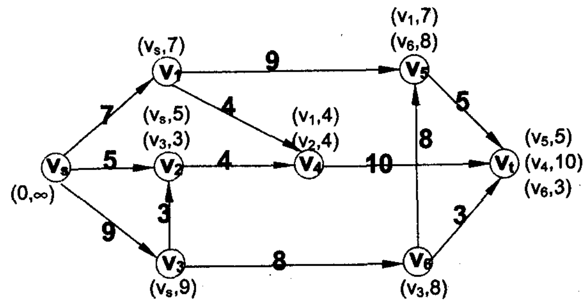

图2　对图1编号

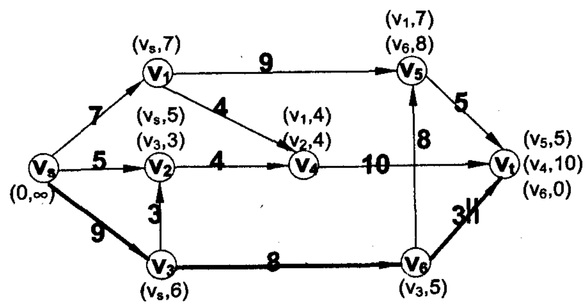

图3　第一条增广链

(3)在图3的基础上,找到第二条增广链为 $v_s-v_3-v_6-v_5-v_t$,其中 $\delta_2=\min\delta_{ij}=\{6,5,8,5\}=5$,并且将增广链中每个顶点的标号改为 $\delta_{ij}^*=\delta_{ij}-\delta$,如图4所示。

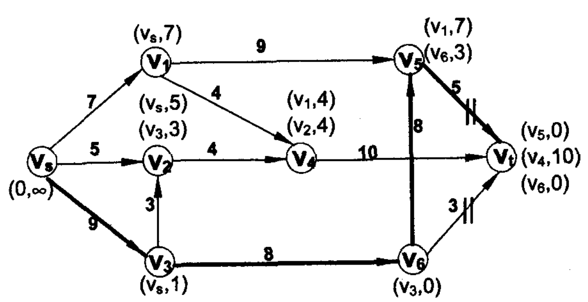

图4　第二条增广链

(4)此时所有单标号增广链已经全部找到,从 v_s 出发找最大容量链为 $v_s-v_3-v_2-v_4-v_t$,$\delta_3=\min\delta_{ij}=\{1,3,4,10\}=1$,同理可以找到最大容量链 $v_s-v_1-v_4-v_t$,$\delta_4=\min\delta_{ij}=\{7,4,9\}=4$,最后找到最大容量链 $v_s-v_2-v_4-v_t$,$\delta_5=\min\delta_{ij}=\{5,3,5\}=3$,如图5所示。

此时,不再存在从 v_s 到 v_t 的增广链时,结束。

(5)由图5可知,最大流为 $f_{\max}=\sum\delta_{ij}^*=3+5+1+4+3=16$。

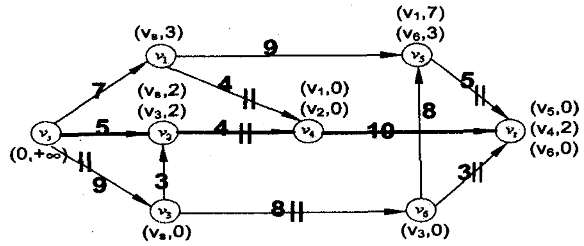

图5　第三条增广链

5 结束语

文中在Ford-Fulkerson标号算法的基础上,寻找到一个新的标号算法,此方法可以避免因选择增广链的不同而造成结果不同,不会进行重复计算,又不易漏掉增广链,通过标号,可以判断哪条路径不能构成增广链,从而可避免选择增广链时的重复性。

参考文献:

[1] Zhang Xianchao. Research on the maximum network flow problem[J]. Journal of Computer Research and Development, 2003,40(9):1281-1292.

[2] Martens M, Skutella M. Flows on few paths: algorithms and lower bounds[J]. Networks,2006,48(2):68-76.

[3] 王志强,孙小军. 网络最大流的新算法[J]. 计算机工程与设计,2009,30(10):2357-2359.

[4] 罗会兰. 网络最大流算法的改进[J]. 邵阳高专学报,1996,9(3):201-203.

[5] 徐翠霞. 深度优先搜索最大流问题的简单算法[J]. 潍坊学院学报,2006,6(6):30-32.

[6] 陈　静,单　锐. 容差修正网络最大流问题2F算法[J]. 长春工业大学学报,2008,29(6):713-716.

[7] 张宪超,江　贺. 一个新的最大流问题增载轨算法[J]. 小型微型计算机系统,2006,27(9):1726-1730.

[8] 孙泽宇. 基于标号法求解网络最大流算法的研究[J]. 甘肃联合大学学报(自然科学版),2009,23(4):64-66.

[9] 赵礼峰,陈　华,宋常城,等. 基于一个网络图最大流算法的改进[J]. 计算机技术与发展,2010,20(12):162-165.

[10] 谢　政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2003:116-123.

[11] Minoux M. On robust maximum flow with polyhedral uncertainty sets[J]. Optim Lett. ,2009(3):367-376.

[12] 刘缵武. 应用图论[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2006:123-125.

[13] 谭洁群. 求网络最大流的新方法[J]. 洛阳大学学报,1997,12(2):1-2.

[14] 顾基发,钱颂迪,田　丰,等. 运筹学[M]. 北京:北京清华大学出版社,2006:213-215.

[15] Hamacher H W, Pedersen C R, Ruzika S. Multiple objective minimum cost flow problems: A review[J]. European Journal of Operational Research,2007,176:1404-1422.