

# 基于 FastICA 算法的盲源分离

王建雄, 张立民, 钟兆根

(海军航空工程学院 电子信息工程系, 山东 烟台 264001)

**摘要:**近年来,ICA(Independent Component Analysis,独立成分分析)已成为处理BSS(Blind Source Separation,盲源分离)问题的主要手段,同时也受到人们越来越多的关注,为此讨论ICA的原理及其优越性。首先介绍ICA,然后引入FastICA算法的推导过程,最后通过MATLAB仿真将其与梯度算法、PCA(Principal Component Analysis,主成分分析)算法所得的仿真结果进行对比分析。通过算法验证,经FastICA处理得到的分离信号与源信号相关系数的绝对值不小于0.99,与其他两种算法比较可以明显地得到FastICA是一种更为有效的盲源分离方法。

**关键词:**独立成分分析;盲源分离;主成分分析;梯度算法

**中图分类号:**TP301.6

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2011)12-0093-04

## Blind Source Separation Based on FastICA Algorithm

WANG Jian-xiong, ZHANG Li-min, ZHONG Zhao-gen

(Dept. of Electronic Information Engineering, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai 264001, China)

**Abstract:**ICA has been a primary method solving BSS in recent years, and aroused more and more concern, so discuss the principle and superiority. In this paper, introduce ICA and FastICA algorithm firstly, then analyze simulation result by FastICA, gradient algorithm and PCA. Through verification, absolute value of correlation coefficient between separation signals and source signals is not less than 0.99. Compared with other algorithms, conclude FastICA is a more effective algorithm.

**Key words:**independent component analysis; blind source separation; principal component analysis; gradient algorithm

## 0 引言

ICA是盲源分离的一个重要工具,其最著名的应用就是“鸡尾酒会”问题。ICA<sup>[1-4]</sup>理论的发展可以追溯到20世纪90年代中期,法国学者C. Jutten和J. Herault等人首次提出了ICA的概念。然而,当时正是神经网络研究的高潮期,ICA理论的研究只是在小范围内进行,并未受到广泛重视。直到90年代中期,ICA的理论和算法研究才真正得以发展,并受到国际信号处理界的广泛关注,P. Comon于1994年第一个将独立成分分析方法应用于盲源分离。之后,ICA就处于蓬勃发展之中。

文中引入FastICA算法<sup>[5-9]</sup>,研究其原理及推导过程。通过MATLAB仿真,将FastICA与梯度算法、PCA两种算法得到的仿真结果进行分析。通过分析,FastICA是一种比梯度算法<sup>[10]</sup>和PCA算法<sup>[11,12]</sup>更为有效的算法。

## 1 独立成分分析

基本ICA模型是一个生成模型,它描述所观测的数据是如何由一个混合过程所产生。假设有 $n$ 个统计独立的随机变量 $s_1, s_2, \dots, s_n$ ,其线性组合生成 $n$ 个随机变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,即

$$x_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{in}s_n \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ 是实系数。令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ 和 $\mathbf{A}$ 是元素为 $a_{ij}$ 的矩阵,式(1)用向量-矩阵方式表示为:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (2)$$

为了确保基本ICA模型是可解的,必须作出如下假设和约束<sup>[13]</sup>:

- (1)独立成分是统计独立的;
- (2)独立成分具有非高斯分布;
- (3)未知混合矩阵是方阵,即独立成分数等于观测混合信号数。若独立分量数小于观测信号数时,可对观测信号进行白化,从而降低数据维数。

当满足以上三个假设条件后,可以考虑对上述混合矩阵求逆,而表示成一种线性求和的形式:

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \quad (3)$$

收稿日期:2011-04-26;修回日期:2011-07-28

基金项目:国家自然科学基金(61032001, 60972159, 61002006)

作者简介:王建雄(1987-),男,山西临汾人,硕士研究生,主要研究领域为盲信号处理;张立民,博士,教授,主要研究领域为信号与信息处理。

因此,为了估计其中一个独立成分,考虑对  $x_i$  进行某种线性组合。用  $y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} = \sum_i b_i x_i$  表示该组合,其中  $\mathbf{b}$  为待确定的向量。则由式(2)可得:

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{q}^T \mathbf{s} = \sum_i q_i s_i \quad (4)$$

## 2 FastICA 算法

### 2.1 中心化和白化

进行 ICA 之前,需要对信号进行中心化和白化。中心化就是观测矢量  $\mathbf{x}$  减去它的均值,变成零均值矢量。白化的含义是将观测变量  $\mathbf{x}$  进行线性变换  $\mathbf{Q}$ , 得到  $\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$ , 其中  $\mathbf{v}$  的各分量  $v_i$  互不相关,且具有单位方差(即  $E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{I}$ )。

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{E}^{-T} \mathbf{U}^T \mathbf{x} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{E} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 是相关阵  $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$  的  $n$  个最大特征值组成的对角阵;  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 是  $n$  个相应的特征矢量组成的矩阵。

变换之后,  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{s}$  之间的关系为:  $\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{s}$ 。因为独立分量  $s_i$  有单位方差,  $E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{B}\mathbf{E}\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$  为正交阵。因此一旦  $\mathbf{B}$  求出后,就可以采用 FastICA 算法去实现盲源分离。

由于两个独立分量之和分布的高斯型比原始变量更强,因此  $y = \mathbf{q}^T \mathbf{s}$  应该比任何一个  $s_i$  的高斯性更强,只有当  $y$  恰好是  $s_i$  中的一个时  $y$  的高斯性最弱。然而,实际情况中我们并不知道  $\mathbf{q}$  的值,但根据式(4),可以让  $\mathbf{b}$  变化并观察  $\mathbf{b}^T \mathbf{x}$  的分布变化情况。也就是说,通过极大化  $\mathbf{b}^T \mathbf{x}$  的非高斯性,就可以得到其中一个独立成分。

### 2.2 非高斯性判决准则

为了在 ICA 估计中使用非高斯性,必须对随机变量的非高斯性定义一个量化的指标。而最经典的非高斯性度量是有关随机变量的四阶累积量,即峭度。 $y$  的峭度  $\text{kurt}(y)$  定义为:

$$\text{kurt}(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2 \quad (6)$$

这里进一步假定  $y$  已被标准化过,其方差为 1。因此式(6)被简化表示为:

$$\text{kurt}(y) = E\{y^4\} - 3 \quad (7)$$

对高斯分布,四阶矩等于  $3(E\{y^2\})^2$ , 高斯随机变量的峭度为零。所以,利用峭度度量非高斯性,通过变换使峭度最大化就是最简单的 ICA 估计方法。

尽管用峭度对非高斯性进行度量简单方便,然而它对野值却极其敏感。这里引入非高斯性的另一个度量负熵。随机变量  $y$  的负熵定义为:

$$J(y) = H(y_{\text{gauss}}) - H(y) \quad (8)$$

然而使用负熵所遇到的问题使计算非常困难,因此对它取近似:

$$J(y) \approx k_1 (E(G^1(y)))^2 + k_2 (E(G^2(y)))^2 - E(G^2(y))^2 \quad (9)$$

式中  $G^1$  和  $G^2$  是非二次函数,  $k_1$  和  $k_2$  是正常数,  $v$  是零均值单位方差的高斯变量。如果仅使用一个非二次函数  $G$ , 相应的近似变为:

$$J(y) \propto [E\{G(y)\} - E\{G(v)\}]^2 \quad (10)$$

其中  $G$  为任意的非二次函数。特别地,当  $G(y) = y^4$ , 就会得到基于峭度的近似式。

这样得到了能在峭度和负熵两个经典的非高斯性度量间取得很好折中的负熵近似估计,其概念简单、计算量小,并且具有良好的统计特性。

### 2.3 算法推导

首先引入一种定点迭代方法:

$$\mathbf{w} = E\{\mathbf{v}g(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} \quad (11)$$

其中  $\mathbf{v}$  为式(5)得到的白化数据,  $g$  为非二次函数  $G$  的导数,一般选取  $g$ :

$$g_1(y) = \tanh(a_1 y) \quad (12)$$

$$g_2(y) = y \exp(-y^2/2) \quad (13)$$

$$g_3(y) = y^3 \quad (14)$$

式(12)中常数  $a_1$  取在  $1 \leq a_1 \leq 2$  范围内,通常取 1。

将式(11)两边加上  $\alpha \mathbf{w}$ , 得

$$(1 + \alpha) \mathbf{w} = E\{\mathbf{v}g(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} + \alpha \mathbf{w} \quad (15)$$

其中系数  $\alpha$  可通过近似牛顿法来寻找。按照 kuhn-Tucker 条件,在约束  $E\{(\mathbf{w}^T \mathbf{v})^2\} = \|\mathbf{w}\|^2 = 1$  下,  $E\{G(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\}$  的最优值在点

$$E\{yg(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} + \beta \mathbf{w} = 0 \quad (16)$$

处,式中  $\beta$  是常数。将式(16)左边项记作  $F$  其雅可比矩阵为:

$$J\{F(\mathbf{w})\} = E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T g'(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} + \beta \mathbf{I} \quad (17)$$

因为对数据已做过白化处理,式(17)第一项近似为:

$$E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T g'(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} \approx E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T)E(g'(\mathbf{w}^T \mathbf{v})) = E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\}\mathbf{I} \quad (18)$$

因此,得到了近似的牛顿迭代算法:

$$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} - [E\{zg(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} + \beta \mathbf{w}] / [E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} + \beta] \quad (19)$$

式(19)两边同时乘以  $\beta + E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\}$ , 简化为:

$$\mathbf{w} \leftarrow E\{\mathbf{v}g(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} - E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} \mathbf{w} \quad (20)$$

式(20)就是 FastICA 的基本公式。

至此,将 FastICA 算法过程综合如下:

- (1) 对数据进行中心化使其均值为 0;
- (2) 白化数据,得到  $\mathbf{v}$ ;
- (3) 选择一个具有单位范数的初始化向量  $\mathbf{w}$ ;
- (4) 更新  $\mathbf{w} \leftarrow E\{\mathbf{v}g(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} - E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{v})\} \mathbf{w}$ , 函数  $g$  的定义如式(12)至式(14);

- (5) 标准化  $w$  ,  $w \leftarrow w / \|w\|$  ;
- (6) 如尚未收敛返回到步骤(4)。

3 仿真结果与分析

为了验证上面提出算法的有效性,选取下面 5 路典型的信号进行分离实验:

- (1) 符号信号:  $\text{sign}(\cos(2\pi * 155t/fs))$
- (2) 高频正弦信号:  $\sin(2\pi * 800t/fs)$
- (3) 低频正弦信号:  $\sin(2\pi * 90t/fs)$
- (4) 幅度调制信号:  $\sin(2\pi * 9t/fs) \sin(2\pi * 300t/fs)$
- (5) 随机噪声:  $1 - 2 * \text{rand}(1,t)$

这里选取采样频率为 10kHz,并选取 4000 个数据点。图 1~图 5 为这五种信号分别通过 FastICA、梯度算法、PCA 三种算法分离信号的仿真结果。

由仿真结果及表 1 可知, FastICA 算法与梯度算法、PCA 算法相比,更加有效,所得的分离信号与源信号的相关系数不小于 0.99。

FastICA 不仅比梯度算法、PCA 算法更有效,而且

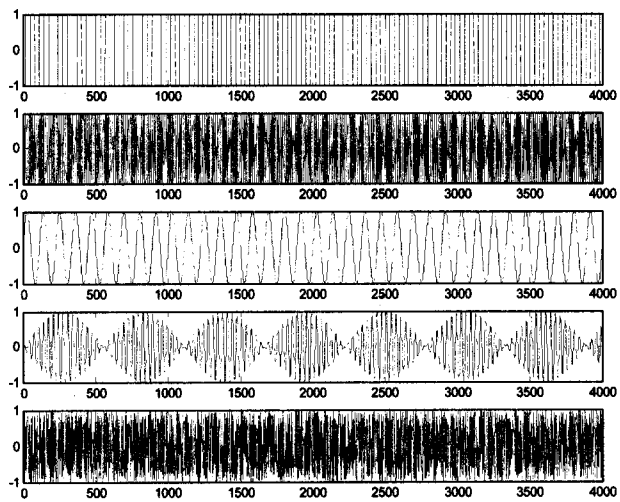


图 1 源信号

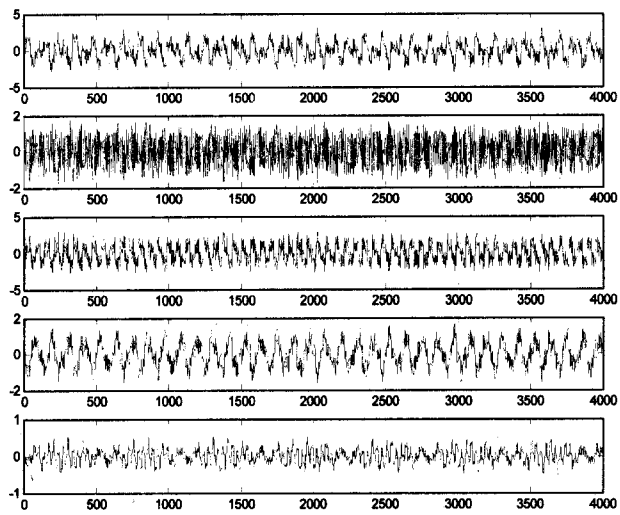


图 2 混和信号

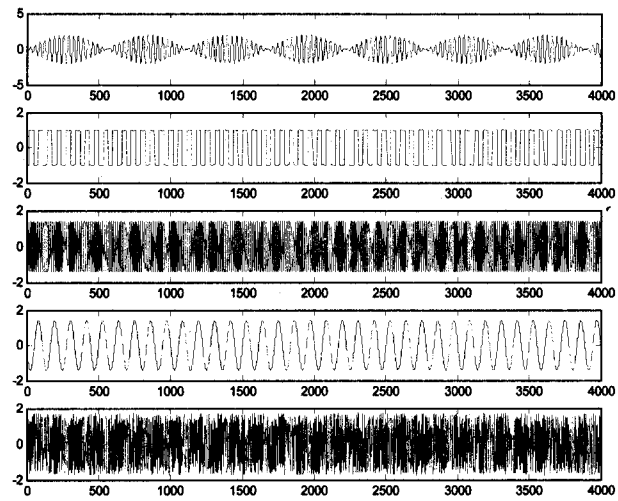


图 3 FastICA 分离信号

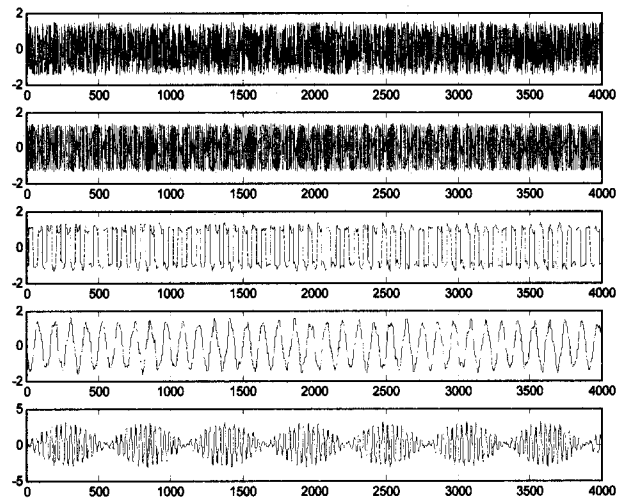


图 4 梯度算法分离信号

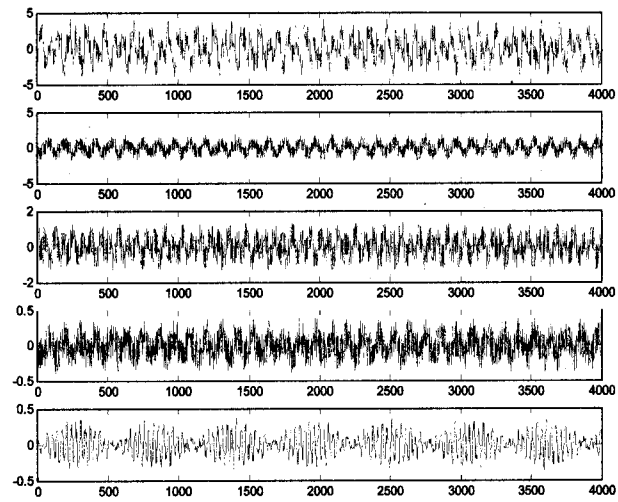


图 5 PCA 分离信号

还具有很多优点:

- (1) FastICA 是按立方收敛的,而梯度算法仅是按线性收敛的,因此, FastICA 收敛速度更快;
- (2) FastICA 不需要选择步长参数,同时也不需要估计源信号的概率密度函数,因此,算法更加简单、易用;

(3) FastICA 在算法实现时仅需要设置合适的非线性函数  $g$  即可,更易实现;

(4) FastICA 在估计源信号时是依次得到独立成分的,因此在遇到只需分离部分源信号的问题时,可以根据需求选择性地分离信号,大大减少计算量。

表 1 不同算法分离后所得信号与源信号之间的相关系数

源信号	S1	S2	S3	S4	S5
ICA	Y2	Y3	Y4	Y1	Y5
$\rho_1$	-0.9984	0.9958	0.9989	0.9906	-0.9997
梯度算法	Y3	Y2	Y4	Y5	Y1
$\rho_2$	-0.9705	0.9849	0.9574	0.9865	-0.9684
PCA	Y1	Y3	Y2	Y5	Y4
$\rho_3$	0.8219	-0.7024	-0.7271	0.8315	0.7859

#### 4 结束语

文中就瞬时混合的线性模型展开讨论,采用 FastICA 算法对观测信号进行盲分离,并将仿真结果与通过梯度算法、PCA 算法仿真的结果进行比较。从仿真结果看, FastICA 是一种比梯度算法、PCA 算法更加有效的算法。然而, FastICA 算法对于瞬时混合的线性模型很实用,但对于非线性模型却并不适用,所以之后的研究工作将主要集中在有关非线性模型的问题上。

#### 参考文献:

- [1] Hyvärinen A, Karhunen J, Oja E. Independent Component Analysis [M]. San Diego: A Wiley - Interscience Publication, 2001.

(上接第 92 页)

#### 参考文献:

- [1] Arai F, Kawaji A, Tomohiko, et al. 3D Micromanipulation System under Microscope [C]//Proceeding of the 1998 International Symposium on Micromechatronics and Human Science. [s. l.]: [s. n.], 1998: 127-133.
- [2] Sun Y, Nelson B J. Biological cell injection using an autonomous microrobotic system [J]. The International Journal of Robotics Research (IJRR), 2002, 21: 861-868.
- [3] 赵 玮, 宗光华, 李旭东, 等. 视觉导引的生物细胞自动操作运动规划的研究 [J]. 高技术通讯, 2001 (8): 93-97.
- [4] 宋彦京, 丁 杰, 杨静宇. 结合水平集方法和 PL 主曲线分析的重叠细胞检测 [J]. 计算机技术与发展, 2010, 20 (5): 199-206.
- [5] Aoyama H, Chiba N, Fuchiaki O, et al. Non-contact bio cell manipulation by nonlinear micro flow around the vibrated pipette on micro robot [C]// Proceedings of ASPE2006 Annual Meeting, Poster Sessions Mechatronics - 1. [s. l.]: [s. n.], 2006.
- [6] 章维一, 侯丽雅, 田桂中. 显微注射用单细胞微操作装置

- [2] Boscolo R. Independent Component Analysis Based on Non-parametric Density Estimation [J]. IEEE Trans, 2004, 15 (1): 55-65.
- [3] 杨竹青, 胡德文. 独立成分分析方法在盲源信号分离中的应用 [J]. 计算机测量与控制, 2002, 10 (3): 200-202.
- [4] Langlois D, Chartier S, Gosselin D. An Introduction to Independent Component Analysis: InfoMax and FastICA Algorithms [J]. Tutorials in Quantitative Methods for Psychology, 2010, 6 (1): 31-38.
- [5] Behera S K. Fast ICA for Blind Source Separation and Its Implementation [D]. [s. l.]: National Institute of Technology, 2009.
- [6] Tichavsky P. Performance Analysis of the FastICA Algorithm and Cramér - Rao Bounds for Linear Independent Component Analysis [J]. IEEE Trans, 2006, 54 (4): 1189-1203.
- [7] 吴微东, 庄哲民. 基于盲源分离的一种快速独立分量分析算法 [J]. 汕头大学学报, 2004, 19 (2): 58-61.
- [8] 李广彪, 张剑云. 基于负熵最大化 FastICA 算法的雷达信号分选 [J]. 舰船电子对抗, 2005, 28 (3): 23-28.
- [9] 曾生根, 朱宁波. 一种改进的快速独立分量分析算法及其在图象分离中的应用 [J]. 中国图象图形学报, 2003, 8 (10): 1159-1165.
- [10] 孙宇字. 盲信号处理基础及其应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.
- [11] 马建仓, 牛奕龙, 陈海龙. 盲信号处理 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2006.
- [12] 李文娟, 郭晓静, 吴小培. 结合 ICA 和 PCA 方法的胎儿心电图提取 [J]. 计算机技术与发展, 2007, 17 (8): 223-225.
- [13] 史习智. 盲信号处理 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2008.

[P]. 中国: CN200810019091. 8, 2008.

- [7] Fumihito A, Toshiaki E, Ryuji Y, et al. 3D 6DOF Manipulation of Micro-object Using Laser Trapped Microtool [C]//Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation. [s. l.]: [s. n.], 2006: 1390-1395.
- [8] Floyd S, Pawashe C, Sitti M. Two-Dimensional Contact and Noncontact Micromanipulation in Liquid Using an Untethered Mobile Magnetic Microrobot [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25 (6): 1-11.
- [9] 于保军, 杨志刚. 视觉控制技术在细胞注射装置中的应用 [J]. 长春理工大学学报 (自然科学版), 2007, 30 (4): 58-62.
- [10] Mattos L, Grant E, Thresher R. Speeding up video processing for blastocyst microinjection [C]//Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Beijing, China: Oct, 2006: 5825-5930.
- [11] 孙家广, 杨长贵. 计算机图形学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [12] Florida Institute for Reproductive Sciences and Technologies [EB/OL]. 2011-01. [http://www.firstivf.net/laboratory\\_tour.htm](http://www.firstivf.net/laboratory_tour.htm).