

# 基于五点算法估计基础矩阵的研究

周春艳, 范学栋, 邹峥嵘

(中南大学信息科学与工程学院, 湖南长沙 410083)

**摘 要:**基础矩阵是三维重建、运动估计、图像定标、匹配的基础,是解决计算机视觉和图像处理领域的重要课题。文中利用点到极线的距离最小原理对五点算法进行改进:在初始模型估计中,使用五点算法,降低算法的抽样次数和抽样时间,然后使用点到极线的距离最小原理对五点算法的多项式的伪解进行剔除,利用正确解求得本质矩阵,再根据本质矩阵与基础矩阵的归一化关系得到基础矩阵。实验证明此算法提高了估计基础矩阵的准确性,排除错误解,提高了五点算法的正确率。

**关键词:**基础矩阵;本质矩阵;五点算法;点到极线的距离最小原理

**中图分类号:**TP301.6

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2011)11-0008-03

## Research of Fundamental Matrix Based on 5-Point Algorithm

ZHOU Chun-yan, FAN Xue-dong, ZOU Zheng-rong

(School of Information Science & Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** Fundamental matrix is the basis of three-dimensional reconstruction and motion estimation, camera calibration and matching, is an important task in computer vision. It uses the Polar distance minimum principle to 5-point algorithm for improving; in the initial estimation, using the 5-point algorithm, reducing the number of algorithm of sampling and sample time, and then point to a line of minimum distance principle removed to 5 points algorithms for polynomial false solution, use the correct solution to the nature of matrix, and then by the basic nature of matrix and matrix normalization of relations between fundamental matrix get fundamental matrix. Experiment proved the algorithm improved the accuracy of estimation basic matrix and removed misunderstanding solution, improved the accuracy rate of the 5-point algorithm.

**Key words:** fundamental matrix; essential matrix; 5-point algorithm; point to a line of minimum distance principle

## 0 引言

从不同角度获得的同一场景的两幅图像间存在着重要的几何约束关系称之为对极几何关系。而对极几何可以用一个秩为2的 $3 \times 3$ 的奇异矩阵来表示,该矩阵被称之为基础矩阵<sup>[1]</sup>。基础矩阵包含了由不同视点处得到的图像之间的重要的几何关系,所以精确地、鲁棒地估计基础矩阵是三维重建、运动估计、图像定标、匹配的基础,是解决计算机视觉和图像处理领域的重要课题<sup>[2]</sup>。

目前已经有了很多利用图像点对来估算基础矩阵的方法。基础矩阵有7个自由度,从8对图像点对应可以线性唯一确定。基础矩阵估计方法可以分为8-点算法和最小点对应算法<sup>[3-6]</sup>。8-点算法主要有

Longuet-Higgins的8点算法和Hartley的改进8点算法<sup>[7]</sup>。前者计算简单,易于实现,但对噪声异常敏感;后者则通过在计算前对二维数据进行规范化处理(平移和尺度变换),减小了噪声对实验结果的影响。最小点对应算法主要有“6-点算法”和“5点算法”。其基本思想是利用场景提供的某些信息,可以减少点对应的个数。由David Nister提出的“5-点算法<sup>[8]</sup>”,基本思想是两幅图像之间的运动为纯平移运动时,给定5对图像对应点,则可以线性确定本质矩阵,通过与基础矩阵的转化关系,便可以确定基础矩阵。相比“8-点算法”和“6-点算法”,“5点算法”所需求的点数更少,且对于平面图像不退化,实现精度更高。但是,由于利用5点来求解本质矩阵是一个多项式求解过程,存在多个解,而并非单一的解。而基础矩阵肯定是唯一的,所以需要将错误的解加以剔除。

文中提出了改进的五点算法利用点到极线的距离最小原理求解出最优解,剔除错误的点对,线性地确定出本质矩阵。然后利用与基础矩阵的内在关系,求出基础矩阵。

收稿日期:2011-04-21;修回日期:2011-07-27

基金项目:国家自然科学基金(6107187)

作者简介:周春艳(1965-),女,湖南人,硕士,副教授,研究方向为数字图像处理、三维激光扫描;范学栋(1983-),男,湖南人,硕士,研究方向为数字图像处理。

## 1 基础矩阵与本质矩阵的简单描述

对极几何表示同一场景的两幅图像间固有的投影几何关系,如图1所示。

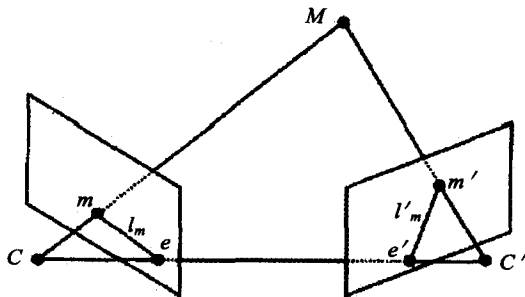


图1 对极几何

基础矩阵是对极几何的代数表达式,它可以从一个图像点与其极线之间的映射关系得到。 $M$ 为三维空间中一点,它在左图像平面上的投影点为 $q$ ,在右图像平面上的投影点为 $q'$ ,那么基础矩阵 $F$ 满足如下关系:

$$qFq' = 0 \quad (1)$$

基础矩阵是 $3 \times 3$ 的方阵,且秩为2。由于基础矩阵在相差一个尺度量的意义下是确定的,它只有8个未知量,取8个对应点对,产生8个矩阵方程:

$$(x, y, 1)F(x', y', 1) = 0 \quad (2)$$

通过8个方程组估计出基础矩阵。

而本质矩阵是归一化图像坐标下的基础矩阵的特殊形式,在归一图像坐标下,它就是基础矩阵,它和基础矩阵之间的关系是:

$$E = K'^T F K \quad (3)$$

其中 $K$ 为标定矩阵。这样,只要能够求出质矩阵,就能够获得基础矩阵。

## 2 五点算法描述

五点算法是基于完全针孔模型而提出的求解本质矩阵的最新的 directions。它最早是由 Sarnoff 公司的 David Nister 提出的,他在2003年发表在IEEE上的论文“An Efficient Solution to the Five-Point Relative Pose Problem”<sup>[9]</sup>提出当摄像机在两幅图像之间的运动为纯平移运动时,给定5对图像对应点,则可以线性确定本质矩阵。而我国著名自动化专家吴福朝也论证了五点算法的可行性和准确性<sup>[10]</sup>。

用齐次3向量 $q$ 和 $q'$ 分别来表示两个摄像机图像上的任一一对应点, $Q$ 为世界坐标系下的齐次4向量。那么通过 $3 \times 4$ 摄像矩阵 $P$ 可以获得相对应的射影图像,即

$$q \sim PQ$$

用 $(R, t)$ 表示摄像机的纯平移运动,其中 $R$ 为旋转矩阵, $t$ 为纯平移矩阵。至此将摄像机矩阵转换为

$$P = K[R | t]$$

$K$ 为 $3 \times 3$ 摄像机的内参数矩阵,仅依赖于摄像机的内部特性。设定 $K_1[1 | 0]$ 为初始摄像机运动时的摄像矩阵,那么 $K_2[R | t]$ 为到达终点时的摄像矩阵。其中

$$[t]_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么基础矩阵为:

$$F = K_2^{-T} [t]_x R K_1^{-1} \quad (4)$$

而由(1)式可知

$$q K_2^{-T} [t]_x R K_1^{-1} q' = 0 \quad (5)$$

对于基础矩阵,(1)式是在没有标定条件下的模型。然而,对于射影中心未限定的图像, $F$ 依然成立。如果 $K_1$ 和 $K_2$ 是可知的,称摄像矩阵是已标定的。那么,对于假定的 $q$ 和 $q'$ 可以与 $K_1^{-1}$ 和 $K_2^{-1}$ 左乘,极限约束可以简化为

$$q'^T E q = 0 \quad (6)$$

其中矩阵 $E = [t]_x R$ 被称为本质矩阵<sup>[11]</sup>。是一秩为2的 $3 \times 3$ 矩阵,自由度为5。故仅需5点便可以线性确定本质矩阵。通过与基础矩阵的转化关系,便可以确定基础矩阵。

## 3 改进的五点算法

文中提出使用点到极线的距离最小原理对五点算法的异解进行排除。其理论及具体步骤如下:

点到极线的距离最小原理<sup>[12]</sup>:因为正确的相机姿态 $R$ 和位置元素 $T$ 对应的本质矩阵 $E$ ,将第一幅图像上的点投影到第二幅图像时变为一条极线,在第二幅图像上的对应点到该极线的距离最小。同理,第二幅图像上的点映射为第一幅图像上的极线,在第一幅图像上的对应点到该极线的距离也最小,因此这两个距离之和最小。反之,如果是误解,这两个距离的和不是最小的。因此可以根据这一理论进行误解的排除,即:点到极线的距离最小,公式表示为:

$$\sum_{i=0}^N (d(x_i^T, Ex_i)^2 + d(x_i, E^T x_i')^2) = \sum_{i=0}^N (x_i^T, Ex_i)^2 \left( \frac{1}{(Ex_i)_1^2 + (Ex_i)_2^2} + \frac{1}{(E^T x_i')_1^2 + (E^T x_i')_2^2} \right)$$

其中 $d(a, b)$ 表示 $a, b$ 两点间的距离。

当然,点到极线的距离最小原理受噪声的影响较大,对像点的值敏感。所以此方法更适用于噪声较小的图片<sup>[7]</sup>。

其具体的算法步骤为:

- (1) 利用 Harris 角点算法获取特征点初始点集。
- (2) 用五点算法求取本质矩阵所有可能解。
- (3) 使用点到极线的距离最小原理剔除和筛选出

最终准确解。

(4) 通过与基础矩阵关系求出正确的基础矩阵。

#### 4 实验结果与分析

文中采用真实场景图像,图像摄于中南大学新校区图书馆,两幅图像分别是同一摄像机在不同角度对同一场景进行的拍摄。实验环境是 matlab7.0,左右视图图像大小为  $560 \times 560$ ,为了排版方便,对实验的图像进行了适当的缩小处理。实验结果如图 2、3 所示。



图 2 Harris 算法角点检测图

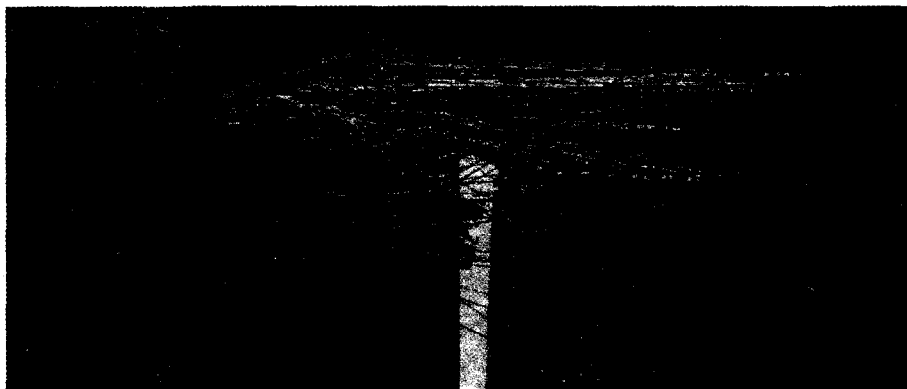


图 3 两幅图像匹配效果图

其中 Harris 算子计算时采用  $k=0.02$ ,每幅图像特征点为 1536 个。

实验数据对比见表 1。

表 1 实验数据对比

	预匹配点数	准确率(%)	估算时间(s)	速度提高(%)
初始五点算法	1536	56%	1.55000	12.3
改进后的五点算法	1536	77%	1.38400	

可以看到两幅图像的匹配点位置一致。左右视图匹配点分别在对应极线上,满足对极约束。所以,估算出来的基本矩阵是准确的。

#### 5 结束语

文中对计算机视觉中基础矩阵估计问题进行了研究,对两幅图像采用特征点提取、特征点预匹配和五点

估计算法。重点讨论了点到极线的距离最小原理下的五点基础矩阵估计算法。

实验中给出了特征提取、特征点匹配的实验结果,并通过实验证明,使用文中所述方法改善了五点算法中的误解问题,使得估计基本矩阵准确率和估算时间得到了提高。由于算法中对误解的排除会额外花费时间,如果能够提高剔除误解的执行效率,此算法能够得到进一步的提高。

#### 参考文献:

- [1] 吴福朝. 计算机视觉中的数学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [2] 王建文, 王敏. 基于双目立体视觉的鞋植三维建模[J]. 计算机技术与发展, 2009, 19(4): 224-230.
- [3] 胡玉锁, 陈宗海. 一种新的基于线性 EIV 模型的鲁棒估计算法[J]. 计算机研究与发展, 2006, 43(3): 483-488.
- [4] 陈付幸, 王润生. 基于预检验的快速随机抽样一致性算法[J]. 软件学报, 2005, 16(8): 1431-1437.
- [5] 章毓晋. 图像理解与计算机视觉(图象工程下册)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [6] Hartley R. In defence of the 8-point algorithm[C]// Proceedings of the International Conference on Computer Vision. Boston: IEEE Computer Society Press, 1995: 1064-1070.
- [7] Longuet-Higgins H C. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections[J]. Nature, 1981, 293: 133-135.
- [8] 吴福朝, 胡占义. 基本矩阵的 5 点和 4 点算法[J]. 自动化学报, 2002, 39(12): 175-180.
- [9] 王建琦, 邓雁萍. 一种改进的角点提取方法[J]. 上海交通大学学报, 2000, 34(7): 913-916.
- [10] Nister D. An Efficient Solution to the Five-Point Relative Pose Problem[C]// IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. [s. l.]: [s. n.], 2003.
- [11] 马颂德, 张正友. 计算机视觉——计算理论与算法基础[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [12] 周东翔, 蔡宣平, 孙茂印. 基于模糊判别的立体匹配算法[J]. 中国图象图形学报, 2001, 6(4): 359-364.