

# 基于三角形连接的有限元网格划分

许文彬, 张华良

(上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200072)

**摘要:**文中创新地提出了三角形连接的有限元网格划分的算法,但是三角形并不是有限元计算的基本单元,而是根据已经生成的三角形生成较为规整的四边形。在实际的项目过程中,创新地提出了三种有效的算法,并利用C++面向对象的MFC程序设计和编写。本程序可以从模型文件读取边界以及点约束和线约束特征数据,程序自动计算出一个较为合理的边界间距值,并且根据需要人工或自动选择一种划分算法,从而自动完成高质量的四边形网格划分。三种算法皆可以处理大量数据点和线,并且划分速度较为高效。本程序模块成功应用于有限元计算软件中。

**关键词:**网格划分;四边形网格;三角形划分

**中图分类号:**TP39

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2011)09-0059-04

## Finite Element Mesh Division Based on Triangle Conjunction

XU Wen-bin, ZHANG Hua-liang

(School of Mechatronics Engineering & Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract:** Creatively proposed the finite element mesh division method based on triangle conjunction. However, the created triangles are not the basic units of the finite calculation. The created triangles will generate regular quadrilaterals. In the real projects, creatively put forwards three effective algorithms and use C++ object-oriented designing method and MFC framework to programme the algorithm. This programme can read boundary information, point restrain and line restrain datas from the model file. The programme will calculate a reasonable boundary interval, and then select a division algorithm manually or automatically, thus complete the high-qualified quadrilateral mesh division. Three algorithms can deal large amount of point and line data, meanwhile, the division speed is highly effective. Finally, this programme module has been successfully applied to the finite element calculation software.

**Key words:** mesh division; quadrilateral mesh; triangle division

## 0 引言

有限元法是基于从问题领域的提取和离散化中获取的数学模型,同时也结合了物理问题中有用的额外的必要信息。离散化也称作有限元网格,包含一组节点和顶点(点或者坐标)以及用预定义拓扑数学(三角形、四边形等)而组成的一组单元。在有限元研究领域,国内已经有许多专家和学者对有限元的网格划分以及生成方法进行了概括和研究总结<sup>[1-5]</sup>。在有限元分析中,建立初始模型(有限元的预处理)时进行网格划分的步骤是很必要的,有限元网格划分的质量高低直接关系到后处理数值计算的精确性和可靠性。

目前有限元网格划分的通用方法主要有7种:

- 1) Delaunay 三角划分法。
- 2) 波前法。

- 3) 轮廓生成法。
- 4) 内部优先法。
- 5) 四叉树。
- 6) 细分提取法。
- 7) 铺砌法。

Delaunay 三角划分法<sup>[6]</sup>、铺砌法<sup>[7]</sup>、波前法<sup>[8,9]</sup>、轮廓生成法<sup>[10]</sup>都是生成三角形网格;内部优先法<sup>[11]</sup>虽然可以生成四边形网格,但是仍然会有三角形,这样四边形和三角形的混合为计算带来不便;四叉树法<sup>[12]</sup>会有不规则和畸形网格产生;细分提取法<sup>[13]</sup>则会产生大小不一的网格。以上各种算法都各有优缺点,但是对于有限元计算来说最合理和理想的是较规整的一系列四边形网格,而上述算法都显然无法满足要求。但后来也有人提出了由波前法生成三角形网格,随后合并三角形网格生成四边形网格的方法<sup>[14]</sup>。但是三角形合并的算法过于复杂,需要寻找共同边来合并两个三角形,并且会有可能出现最后没有三角形可以合并的情况。在实际建筑结构中,大量的墙体和梁柱结构,这些抽象到图形上都会形成点和线,这些点和线称

收稿日期:2010-12-06;修回日期:2011-02-24

基金项目:上海市教育科研基金(01QN61)

作者简介:许文彬(1986-),男,上海人,硕士研究生,研究方向为三维图形图像。

为约束,建筑结构中的内部空缺区域的周边将形成应力集中的情况。

有人提出了基于约束的三角形网格划分方法<sup>[15]</sup>,但是三角形网格在有限元分析时,精确度不如四边形网格,在实际网格生成过程中,以往的算法过于迟缓,迫切需要一种可以高效、高速、精确度高的有限元网格的生成方法。

因此,文中创新地提出三种不同网格划分方法:首先将多边形生成三角形的网格,将生成的三角形网格进行三等分,划分为三个四边形的网格;基于生成的三角形网格,将生成的三角形网格进行三角形和四边形的组合划分;基于铺砌法的思想,自上而下的矩形划分生成法。最后,文中的理论经过实际的项目以及程序运行,成功地融入到实际的 CAE 建筑模型和有限元分析软件中,并获得较好的运行效率和划分效果,从而证明了文中三个算法思想是可行及高效的。

## 1 有限元网格划分概述

### 1.1 网格数量

网格数量对于有限元的后处理计算有着很重要的作用,其直接影响到计算的精度和计算量以及耗费的计算时间。一般说来,网格数量的增加,计算精度将会提高,与此同时也会带来计算时间的增加;反之,网格数量的减少,虽然计算精度降低了,但是求解和计算的时间大大减少。另一方面,对于网格数量而言,在其数量增加到一定程度后,其对于计算精度的提高微乎其微,故而网格数量的确定需要根据实际项目的需求进行评估,程序在划分网格时也应该对划分网格数量进行较好的权衡,做到既不浪费计算时间,同时也有较好的计算精度。

### 1.2 网格密度

网格密度是指在有限元模型结构的不同部位采取密度不一的网格,这样做是为了针对模型结构的不同特征进行区别处理。在计算内部特征变化较大的区域(比如孔附近的应力集中处),为了更好地反映应力的变化规律,就需要提高网格的划分密度。在计算内部特征变化较小的区域,为了降低模型的划分规模,应当采取相对稀疏的网格。

### 1.3 网格划分质量

有限元网格的划分质量是指网格的几何形状的有效性、合理性,网格划分质量的高低对于计算结果的精度有着极大的影响,对于大内角的网格其计算结果相比于规整和小内角的网格的计算结果要差。

网格划分质量可以通过角度控制、边长比、拉伸值等控制。在实际的建筑结构中,需要根据具体的情况结合各种控制条件同时来剔除质量差的网格。

## 1.4 网格划分的自适应性

网格划分的自适应性就是在有限元网格的几何尖锐区域,应力、温度等变化较大的区域对网格进行紧密划分,其他部位则进行相对稀疏的划分,这样做可以保证计算精确可靠。自适应划分是网格划分中自动近似的方法,程序通过只能判断来减少网格划分不当引起的误差,不需要手工指定单元的大小。自适应有限元分析的最基本理念就是通过对划分后的网格评估,对计算结果误差较大的网格区域进行局部网格优化。

文中的自适应应用只要针对划分后的大角度三角形以及应力集中等情况就需要用到自适应网格划分的思想,将大角度三角形修正为理想的锐角三角形,以及自动根据网格边长和相邻边情况来调整应力集中网格划分的划分密度。

## 2 特征约束的定义及其相应的处理

文中虽然是基于铺砌法的思想,但是与铺砌法有很大不同,采用的是自上而下的铺砌,而且是根据点特征约束和线特征约束来划分三角形网格,随后再生成四边形网格。

### 2.1 特征约束的概念和定义

文中所涉及的特征约束包括线约束和点约束,由于实际建筑工程中,墙截面所支撑的地方将对整个建筑形成线约束,而梁和柱等结构将对建筑截面形成点约束。约束可以分为:在边界上的点约束;在边界上的线约束;点约束在线约束上。

### 2.2 对约束特征的预处理

文中采用了全局的处理办法,将点以及线统一划归为点数据结构处理,考虑到在处理速度上的优化,采用 STL(C++中的标准模板库——Standard Template Library)中的 map 容器来存储点和线数据。采用 map 的优点在于存储点和线的时候可以自动对输入数据进行排序,这样在连接三角形的过程中可以保证是自上而下的铺砌处理。另外,考虑到实际运行中的连接效率问题以及点的搜索速度,对于点的数据结构的设计考虑周边邻近点和直线对应点的指针地址的保存。

### 2.3 三角形连接规则

文中的前两种算法都是基于三角形划分的。首先对于多边形的外轮廓进行预处理等分分段,随后从循环遍历 map 中的数据点,得到的每个数据点将搜寻器周围的最近的 n 个点(在实际操作和程序测试中通常设为 10 个点,这样既可以保证划分精度,也可以保证划分速度,在实际操作中也可根据实际的划分效果动态调整),然后将从最近的三个点开始连接三角形,直到当前点的已连接三角形与其已连接的点的数目相同,则这个点称之为内点,内点是不可以再连接生成三

角形的点,如果再连接将产生交叉三角形。

#### 2.4 三类算法操作

第一类:三角形划分法操作(见图1),就是将已经划分的三角形进行划分四边形的操作。具体方法是取三角形的形心,然后分别通过这个形心做垂线到三角形的三条边,这样就将四边形划分成为三个三角形,生成的就是较为规整的三个四边形了。

第二类:三角形和四边形组合划分操作(见图2),是根据给定约束点以及约束线自动计算好等分间距,然后根据等分间距将划分好的三角形进行边的等分,然后将等分的点与对应边一一相连。组合划分根据实际需求,还有另一种方法,即应力集中划分法,这个方法不同的地方在于以约束点为基准,像对应边的划分点做线段,而另外两边一一对应连接划分点即可。而组合法在最后还需要将相邻的三角形进行合并,最后将两个三角形组成一个四边形,从而利于后面的有限元计算。三角形和四边形组合划分适合于对划分精度较高情况。

第三类:矩形生成法(见图3),先期处理斜线约束,依照垂直于斜线的原则划分。自上而下,从左上角的约束点开始,搜寻水平方向的坐标和垂直方向的坐标离它最近的坐标值,然后将x坐标值和y坐标值组成新的约束点,随后根据这两个约束点生成矩形。矩形生成法适合于约束点和约束线较规整的情况。

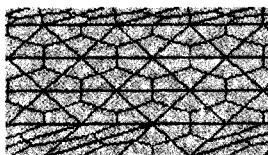


图1 三角形划分法

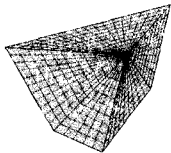


图2 组合划分法(应力集中)

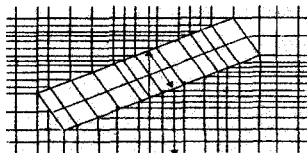


图3 矩形生成法

上述三类操作,第一种操作较为方便,处理速度快,效率较高。第二种需要考虑三角形合并问题,在划分后需要进一步处理,但是划分的网格较为细致。第三种操作也相对复杂,由于是矩形生成,有斜线的时候需要对斜线约束等进行特殊处理,其特点是划分网格四边形较为规整,但是由于要涉及到预先处理约束等状况,相对其余两种方法较为费时。

### 3 算法实现

根据上面的方法,文中实现了网格划分的三种算法,根据实际需要使用其中一种算法来完成网格划分,基本大体步骤如下(见图4):

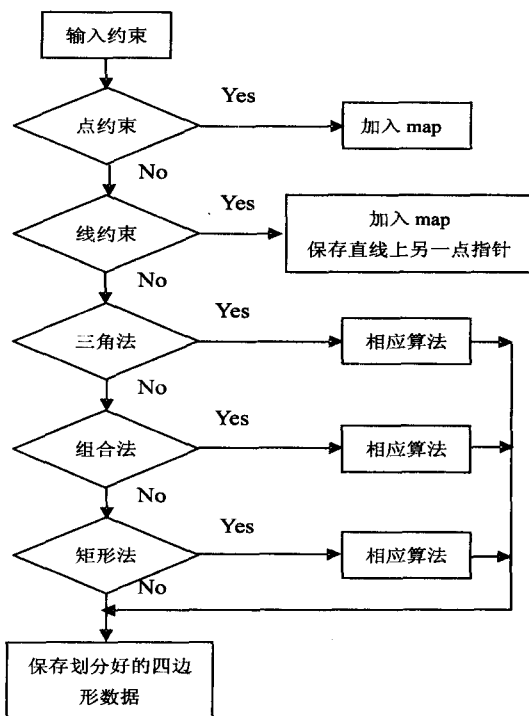


图4 算法流程

- 1) 接受输入信息,从文件中读取模型坐标信息。
- 2) 判断是否点约束,如果是点约束,把点加入 map 结构中。
- 3) 判断是否线约束,如果是线约束,则加入 map 结构,并且保存直线上另一点的指针地址,用于后续搜索点的处理。
- 4) 根据实际情况判断选择使用三角法,如果是三角法,则进入三角算法。
- 5) 根据实际情况判断选择使用组合法,如果是组合法,则进入组合法。
- 6) 根据实际情况判断选择使用矩形法,如果是矩形法,则进入矩形算法。
- 7) 最后在整个网格划分完成后,以减少非规则节点数目和改善单元质量为目标,删除或加入单元。
- 8) 对于组合法,最后还需要进行相邻三角形合并。合并的方法是通过搜寻两个具有同一条边的三角形,考虑到效率问题,在生成三角形连接的时候已经将每条生成的三角形便做了编号,这样在搜寻同边的三角形上加快了速度。

### 4 算法改进

虽然文中提出的三种算法在实际应用中都可以完成网格划分的工作,但是由于文中是基于实际的工程

建筑结构项目,实际需要处理的约束点以及直线数量较大,最后划分的网格一个比较大的问题就是有非常密集的点之间也进行了三角形连接以及四边形划分。这样在实际的图形显示中,原本的三角形在实际的划分效果图上展示的时候就像是一条直线。于是综合实际项目的计算精度和实际考虑,最终评估后得出结论:相邻 10 厘米之内的两个约束点的情况下,在一开始加入 map 处理的时候就将剔除其中一个,以保留线约束为优先。不考虑其对整个建筑结构所产生的影响,是由于其相对于整个建筑结构平面来说是微乎其微的。

另外一个实际应用过程中问题就是三角划分后的网格有些会出现大钝角,为了避免这种情况,在划分三角形的时候对生成的三角形进行评级。我们知道三角形的角度与其三条边相关,如果最大边的平方等于其余两边的平方和,则这个三角形的最大角为直角;如果最大边的平方小于其余两边的平方和,则为锐角;如果最大边的平方大于其余两边的平方和,则为钝角。所以在生成三角形的同时,对三条边进行排序,然后计算出最大角的角度值,如果符合 60 度左右的锐角,就保存此三角形,反之,则排除该三角形。在实际的计算过程中,考虑到程序运行时用到的正弦和余弦计算的费时和费内存的问题,最终采取较小的两边的平方和除以较大边的平方的比值来作为评级的依据,并且通过边长来共同约束大钝角三角形的出现。

## 5 结束语

文中所述的四边形有限元网格划分法是一种边生成边调整的自动生成方法,在程序执行初期会根据实际点的密集度和相邻距离计算出一个合理的划分间距,随后通过约束数据的预处理和不合理点的剔除,根据实际需要选择三角法、组合法以及矩形法中的一种合适的算法来进行网格划分,最后再对划分后的数据进行优化处理方便后续计算。文中的三种算法是在实际的项目中摸索得出的,具有较高的实用价值,在实际的建筑结构的分析中,近万个约束点以及直线的网格划分只需几分钟即可完成,并且有效地应用于实际的软件中。

文中的算法还是有值得提高的地方,如何进一步提高划分速度、划分出更加规整的四边形网格、智能地整合三种划分算法将是未来的主要研究方向。

## 参考文献:

- [1] 胡恩球,张新访,向文,等.有限元网格生成方法发展综述[J].计算机辅助设计与图形学学报,1997,9(4):378-383.
  - [2] 关振群,宋超.有限元网格生成方法研究的新进展[J].计算机辅助设计与图形学学报,2003,15(1):1-14.
  - [3] 张玉峰,朱以文.有限元网格自动生成的典型方法与研究前瞻[J].武汉大学学报:工学版,2005,38(2):54-59.
  - [4] 李娅,赵文.有限元网格自动剖分及优化方法[J].四川工业学院学报,2003,22(3):104-106.
  - [5] 王明强,朱永梅,刘文欣,等.有限元网格划分方法应用研究[J].机械设计与制造,2004(1):22-24.
  - [6] George P L, Hermeline F. Delaunay's mesh of a convex polyhedron in dimension d. Application to arbitrary polyhedra[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992(33):975-995.
  - [7] Blacker T D, Stephenson M B. Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 31(4):811-847.
  - [8] Lo S H. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, 21:1403-1426.
  - [9] Zhu J Z, Zienkiewicz O C, Hinton E, et al. A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 32:849-866.
  - [10] Lo S H. Automatic mesh generation and adaptation by using contours[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 31:689-707.
  - [11] Lo S H, Lau T S. Generation of hybrid finite element mesh[J]. Microcomputers in Civil Engineering, 1992(7):235-241.
  - [12] Knuth D E. The Art of Computer Programming[M]. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1975.
  - [13] Rivara M C. New longest-edge algorithms for the refinement and/or improvement of unstructured triangulations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40:3313-3324.
  - [14] 赵熠,张新访,赵建军.前沿法生成四边形网格的改进算法[J].计算机工程与应用,2002,38(9):64-66.
  - [15] 成建梅.具特征约束的有限元三角网格自动生成方法[J].长江科学院院报,2003,20(4):39-43.
- 
- (上接第 58 页)
- [10] Draft-ietf-pwe3-redundancy-02.txt, Pseudowire (PW) Redundancy[S]. IETF, 2009.
  - [11] RFC5036 LDP Specification[S]. IETF, 2007.
  - [12] RFC5331 MPLS Upstream Label Assignment and Context-Specific Label Space[S]. IETF, 2008.
  - [13] 陈春玲,张锦跃,陈云.基于 Mobile IP 的 WiMax 网关切换方法的研究与实现[J].计算机技术与发展,2011,21(4):115-119.