

# 基于变换矩阵的三维重建算法研究

马银平, 彭如

(南昌航空大学, 江西 南昌 330063)

**摘要:**先对传统明暗恢复形状(Shape From Shading)算法进行简单分析,然后提出了一种改进的SFS算法。在图像亮度与反射图函数的差值采用雅可比迭代方法的基础上,改进变换矩阵,使其特征值包含三个平方项,减少了矩阵的结果无效的情形,并且提高了迭代的收敛速度。针对光照条件不好的图像,提出了一种先旋转坐标轴,后双向重建的算法。通过旋转坐标轴一定角度,改变光源方向,减少图像失真,然后双向重建的两幅图像通过加权平均法得到物体的三维重建图。最后,用Matlab编制相应程序,在计算机上进行仿真。实验结果表明,改进的SFS算法是有效的,能够克服传统SFS算法精度低的缺陷,提高了三维重建的稳定性和精确度,缩短了三维重建的时间。

**关键词:**SFS;3D重建;变换矩阵;旋转坐标轴

中图分类号:TN911.73

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2011)08-0078-04

## Study of 3D Reconstruction Algorithm Based on Inverting Matrix

MA Yin-ping, PENG Ru

(Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

**Abstract:**First, simply analyses traditional Shape From Shading algorithms, and then propose a modified SFS algorithm. Based on the difference between the image brightness and the reflectance function using jacobi iteration, modify inverting matrix, to make its eigenvalues consist of three squared terms, decrease the case in which the result of matrix is not valid, improve the convergent speed of iteration. For the images of bad light conditions, propose an algorithm which first rotates coordinates and then bi-direction reconstruction. By rotating coordinates a certain angle, change the light direction, decrease the distortion of the images, and then two images of bi-direction reconstruction use the method of weighted average to obtain three-dimensional reconstruction image of the object. Finally, use Matlab compiling corresponding programs, simulate in the computer. The experiment results show that the modified SFS algorithm is effective, can overcome the disadvantage of low precision in traditional SFS, improve the stability and accuracy of three-dimensional reconstruction, and shortens the time of three-dimensional reconstruction.

**Key words:**SFS; 3D reconstruction; inverting matrix; rotating coordinates

## 0 引言

近年来,由于计算机视觉理论和光电技术的发展,使得基于明暗恢复形状<sup>[1]</sup>(Shape From Shading,简称SFS)的三维重建技术<sup>[2-5]</sup>成为可能。它在工业生产线上自动化测量、医学、SAR图像地形测量及刑事侦查现场痕迹分析等方面都具有广泛而深远的应用价值。明暗恢复形状,即根据一个确定的反射模型建立物体表面形状与图像亮度之间的约束关系,并根据对物体表面形状的先验知识建立物体表面形状参数的约束关系,然后对这些约束关系联立求解可得到物体表面的三维形状。典型的SFS传统算法有四种:最小化方法<sup>[6]</sup>,演化方法<sup>[7]</sup>,局部分析方法<sup>[8]</sup>,线性化方法<sup>[9]</sup>。

为简化问题,传统SFS算法均做如下假设<sup>[10]</sup>:(1)物体表面反射模型<sup>[11]</sup>为朗伯体反射模型;(2)光源为无限远处点光源;(3)成像几何关系为正交投影。由于假设的引入,三维重建的结果肯定与实际物体的形状存在偏差,甚至出现错误的结果。文中在传统的SFS算法基础上,对雅可比迭代方法中的变换矩阵进行改进,减少了矩阵的结果无效的情形,提高了迭代的收敛速度,并通过旋转坐标轴减少图像失真,从而得到更精确和更稳定的三维重建结果。

## 1 传统的SFS算法

在传统SFS算法中,给定一个适当的反射图方程 $R(p, q)$ ,它可以等于图像亮度方程 $I(x, y)$ ,即:

$$R(p, q) = I(x, y) \quad (1)$$

其中 $x, y = 1, 2, \dots, N$ ,  $p$ 和 $q$ 是物体表面点高度关于图像坐标的偏导数, $I(x, y)$ 是归一化图像亮度。

收稿日期:2011-01-12;修回日期:2011-04-24

基金项目:江西省自然科学基金(2010GZS0178)

作者简介:马银平(1963-),女,河南人,教授,研究方向为CAD及图形图像处理;彭如,硕士研究生,研究方向为智能控制。

$P$  和  $S$  的单位矢量可表示为:

$$P = \frac{(p, q, 1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad (2)$$

$$S = \frac{(s, t, 1)}{\sqrt{s^2 + t^2 + 1}} \quad (3)$$

用  $z(x, y)$  表示物体表面点高度,  $p$  和  $q$  可分别表示为  $-\partial z/\partial x$  和  $-\partial z/\partial y$ 。

如果假设反射模型为朗伯体表面反射模型, 反射率  $\rho$  为 1, 则反射图方程是  $P$  和  $S$  的点乘, 即:

$$R(p, q) = \frac{1 + ps + qt}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{1 + s^2 + t^2}} \quad (4)$$

用有限差分方法对  $p$  和  $q$  离散化:

$$p = z(x-1, y) - z(x, y), \quad q = z(x, y-1) - z(x, y) \quad (5)$$

则  $R$  是关于  $z(x, y)$ ,  $z(x-1, y)$  和  $z(x, y-1)$  这三个变量的函数。

把图像亮度函数和反射图函数之差定义为误差函数  $f(x, y)$ , 即:

$$f(x, y) = I(x, y) - R(p, q) \quad (6)$$

然后采用雅可比 (Jacobi) 迭代:

$$\begin{aligned} -f(x, y)^{(n-1)} &= \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial z(x, y)} \right)^{(n-1)} (z(x, y)^{(n)} - z \\ &(x, y)^{(n-1)}) + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial z(x-1, y)} \right)^{(n-1)} (z(x-1, y)^{(n)} - z \\ &(x-1, y)^{(n-1)}) + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial z(x, y-1)} \right)^{(n-1)} (z(x, y-1)^{(n)} \\ &- z(x, y-1)^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $n$  是迭代次数。

方程(7)可以写成下面的矩阵形式:

$$-f^{(n-1)} = g^{(n-1)}(z^{(n)} - z^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

其中  $f$  是一个含有  $N^2$  元素的矢量,  $z$  是一个含有  $N^2$  元素的矢量,  $g$  是一个  $N^2 \times N^2$  矩阵。

物体重建的方法可通过方程(8)迭代实现, 初始值设为零, 即  $z^{(0)} = 0$ 。在这种情况下,  $g$  值可由方程(7)的所有对角线项的乘积求出, 其特征值  $\lambda$  为:

$$\lambda(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial z(x, y)}, \quad x, y = 1, \dots, N \quad (9)$$

## 2 改进的 SFS 算法

### 2.1 改进变换矩阵的算法

当  $P$  和  $S$  平行时, 把方程(4)代人方程(6), 方程(9)的结果全部为零。即使只存在一个这样的元素, 结果是无效的。如果物体有这样的部分, 用这种方法重建会造成数值不稳定, 重建结果与实际情况会存在比较大的偏差, 甚至得到错误的结果。

方程(8)一般可改写为求  $z^{(n)}$  的形式:

$$z^{(n)} = z^{(n-1)} - G^{(n-1)^{-1}} F^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

$$G^{(n-1)} = g^{(n-1)^T} g^{(n-1)} \quad (11)$$

$$F^{(n-1)} = g^{(n-1)^T} f^{(n-1)} \quad (12)$$

这里, 让  $z'$ ,  $G'$  和  $F'$  分别含有  $z$ ,  $G$ ,  $F$  的组成部分, 物体重建的区域减小为

$$1 \leq x \leq N-1 \text{ 和 } 1 \leq y \leq N-1. \text{ 这时, 方程(10)}$$

可改写为:

$$z^{(n)} = z^{(n-1)} - (1/D) G^{(n-1)^{-1}} F^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

其中  $D$  是一个新引入的衰减因子, 可以提高迭代的收敛速度。

特征值  $\lambda$  和  $F'(x, y)$  可分别由下面的式子给出:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial z(x, y)} \right)^2 + \left( \frac{\partial f(x+1, y)}{\partial z(x, y)} \right)^2 + \\ &\left( \frac{\partial f(x, y+1)}{\partial z(x, y)} \right)^2 \quad 1 \leq x \leq N-1, 1 \leq y \leq N-1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F'(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial z(x, y)} f(x, y) + \frac{\partial f(x+1, y)}{\partial z(x, y)} f(x+1, \\ &y) + \frac{\partial f(x, y+1)}{\partial z(x, y)} f(x, y+1) \quad 1 \leq x \leq N-1, 1 \leq y \leq \\ &N-1 \end{aligned} \quad (15)$$

下面对改进变换矩阵的算法进行分析。首先, 可以看到改进变换矩阵中的特征值包括三个平方项, 而传统算法的方程(9)中只有一项。当初始值  $z^{(0)} = 0$  时, 除了  $S = (0, 0, 1)$ , 方程(14)的结果不为零, 而方程(9)对一系列的  $S = (a, -a, 1)$  结果都为零, 其中  $a$  可以为正的或负的实数, 并包括零。因此, 改进后的算法可以减少矩阵的结果无效的情形, 具有更高的稳定性。其次,  $z(x-1, y+1)$ ,  $z(x, y+1)$ ,  $z(x-1, y)$ ,  $z(x, y)$ ,  $z(x+1, y)$ ,  $z(x, y-1)$  和  $z(x+1, y-1)$  七个高度项对方程(14)和方程(15)的结果有影响, 它们在  $(x, y)$  附近分布得相当对称。这个特性对前向和后向重建<sup>[12]</sup>坐标轴上形状相似的图像提供了便利, 能够得到更精确的结果, 如果图像是上下对称的, 重建的结果会更好。最后, 仍需要  $1 \leq x \leq N$  和  $1 \leq y \leq N$  整个区域内的  $G$  和  $F$  得出  $G'$  和  $F'$ 。由于  $z(x, y)$  不是由  $(x, N)$  和  $(y, N)$  这两条边界线估计出来的, 其中  $1 \leq x \leq N$ ,  $1 \leq y \leq N$ , 需要假定沿这两条边界线以及  $(x, 1)$  和  $(y, 1)$  另外两条边界线的  $p$  值和  $q$  值, 这里  $1 \leq x \leq N$ ,  $1 \leq y \leq N$ 。图像是否沿着边界变化决定了两个假设。第一个是当图像沿着边界变化, 假设  $p = 0$  沿着垂直边界线,  $q = 0$  沿着水平边界线。第二个是当图像不沿着边界变化, 假设  $p = -z(1, y)$  或  $z(N-1, y)$  沿着垂直边界线,  $q = -z(x, 1)$  或  $z(x, N-1)$  沿着水平边界线, 并且  $z^{(0)} = 0$ 。

### 2.2 改进的双向重建算法

O. Ikeda 提出的前向和后向重建物体形状可减少

图像失真。文中在其基础上进行改进,可以任意角度旋转坐标轴。有些图像的光照条件不好,三维重建的结果不佳,此时可通过旋转坐标轴,改变光源方向,从而得到更高质量的物体形状。下面进行具体介绍,首先重写方程(13)为

$$z^{(n)}(x, y) = z^{(n-1)}(x, y) - (1/D) \sum_x \sum_y h^{(n-1)}(x', y'; x, y, \sigma, \tau) F^{(n-1)}(x', y') \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

当设  $z^{(0)} = 0$  时,对  $n = 1$ , 函数  $h$  可近似地给出为:

$$h^{(0)}(x', y'; x, y, \sigma, \tau) = A^{(0)}(x, y, \sigma, \tau) p_f^{(0)}(x - x', y - y'; \tau)$$

其中  $A^{(0)}$  为坐标轴中心的一个最大值,并逐渐朝着边界减小,它的变化取决于  $\sigma$  和  $\tau$ 。 $p_f^{(0)}$  归一化对各种各样的  $(x, y)$  值有相似的情况,所以它可以看成一个空间不变的函数。就数值估计而言,  $p_f^{(0)}$  的变化与  $\tau$  有关而与  $\sigma$  无关。对  $n > 1$ , 函数  $h$  的变化取决于  $(x, y)$ , 所以它不再是空间不变的,但它的基本类型仍然是不变的。从方程(16)和(17)可以看出  $p_f^{(0)}$  表明了重建系统的特征。一般来说,函数可以被认为单调递减函数,极值出现在  $x' = x$  和  $y' = y$  处。

当坐标轴旋转的度数不是 90 度的倍数时,在某些地方的图像值需要假定。在文中的重建过程中假定的值要使得重建形状平滑。通过  $p_f(x, y; \tau)$  的类型可以知道沿着某个方向可能出现形状失真的累积。所以当两幅图像从相反的方向重建再求平均时,一般要沿着某个方向变化权重。整个改进的双向重建步骤如下:

(1) 当  $S = (\sigma, \tau)$  的偏角在期望的范围之外,如  $30^\circ < \tau < 60^\circ$ , 可以把坐标轴旋转  $\tau'$ , 使得  $30 < \tau + \tau' < 60$ 。

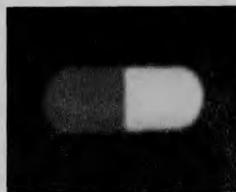
(2) 在旋转后的坐标轴中,分别从两个相反的方向重建出两幅图像。

(3) 在  $x$  和  $y$  方向上的平均梯度可以估计物体的形状,然后决定两幅图像的权重在哪个方向上线性变化。

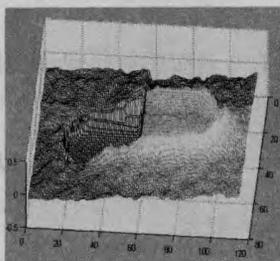
(4) 两幅图像通过加权平均法得到物体的三维重建图。

### 3 实验结果

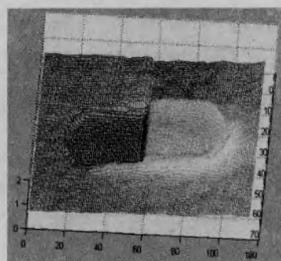
先对药丸和莫扎特头像分别采用传统的 SFS 算法和改进变换矩阵的 SFS 算法重建,实验结果如图 1 和图 2 所示。从重建情况来看,改进变换矩阵的 SFS 算法是有效的,比传统 SFS 算法的结果更精确稳定。然后对人脸图采用采用传统的 SFS 算法和改进的 SFS 算法重建,实验结果如图 3 所示。改进的 SFS 算法改进了变换矩阵,并旋转坐标轴 30 度,再进行正向和反向重建,其中最优权重是线性地随着  $x$  变化,最后通过加



(a) 药丸原图



(b) 传统的 SFS 算法重建图

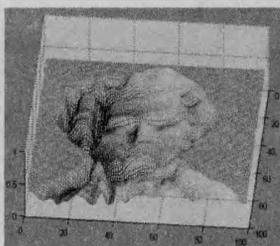


(c) 改进变换矩阵的重建图

图 1 药丸三维重建图



(a) 莫扎特头像原图



(b) 传统的 SFS 算法重建图

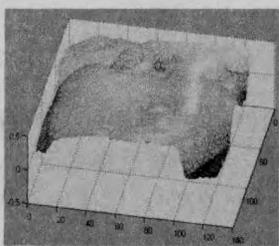


(c) 改进变换矩阵的重建图

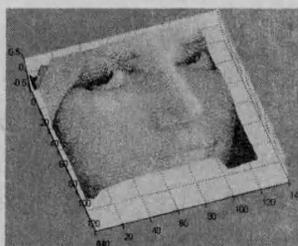
图 2 莫扎特头像三维重建图



(a) 人脸原图



(b) 传统的 SFS 算法重建图



(c) 改进的 SFS 算法重建图

图 3 人脸三维重建图

权平均法得出人脸的三维重建图,从实验结果可以看

出改进变换矩阵和旋转坐标轴可以减小失真,提高重建的稳定性和精确性。

#### 4 结束语

在分析传统 SFS 算法的基础上,综合运用计算机视觉、图像处理和计算机辅助几何设计理论与技术,提出了一种简单可靠的改进 SFS 算法,可以通过单幅图像恢复出物体的三维形状。改进的 SFS 算法适用于更广泛的物体表面重建和各种光照条件,能够克服传统 SFS 算法精度低的缺陷,提高了三维重建的稳定性和精确度,缩短了三维重建的时间,此算法在实际应用中表现出很好的效果。然而,由单幅二维图像重建出物体三维形状技术一直是图像领域研究的难点,主要表现在现有方法重构精度较低、图像反射图方程的迭代求解容易发散以及光照易受到干扰等难以解决的问题,整个理论体系还不完善,新的更有效的 SFS 算法值得去探究。

#### 参考文献:

- [1] Horn B K P. Shape from Shading: A method for Obtaining the Shape of a Smooth. Opaque Object from One View[D]. Massachusetts Inst. of Technology, 1970.
- [2] 胡志勇,张秀芬,蔚刚,等.基于灰度图像的三维曲面重建系统设计[J].计算机技术与发展,2007,17(10):61-

(上接第77页)

下,速度得到明显提升。

#### 3 结束语

文中采用 PCA 算法来使两块点云获得一个粗配准的过程,在粗配准过程后获取一个初值,使得下一步中获得较好的初值,为下一步工作打下良好基础,同时使得配准不限入局部最优解,同时对点云数据进行点集预处理,其中包括去除背景点云数据,对点云进行随机重采样,减少点云数据量,对控制点进行重新选择,采用 k-d tree 加速查找点对过程,明显提高了查询最近点的速度,缺点是 k-d tree 需要非常大的计算量,查找过程中使用距离来限定点对,去除错误的点对,并获得较好的实验结果,表明算法的稳定、有效。

#### 参考文献:

- [1] 张爱武,孙卫东,葛成辉,等.室外大型场景多机位三维数据全局快速配准[J].高技术通讯,2004,14(6):6-13.
- [2] Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3-D shapes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992,14(2):239-256.

- 64.
- [3] 韩兆君.单幅图像的建模技术研究[D].青岛:青岛大学,2009:29-34.
- [4] 谢路生.基于 SFS 的三维测量技术[D].厦门:厦门大学,2009.
- [5] 李健,梁琨.基于明暗恢复法的三维重建算法分析[J].微计算机信息,2006,8(1):202-204.
- [6] Zheng Q,Chellappa R. Estimation of illuminant direction, albedo, and shape from shading [J]. IEEE Trans. on PAMI, 1991,13(7):680-702.
- [7] Pentland A P. Local shading analysis [J]. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984,6:170-187.
- [8] Lee C H R A. Improved methods of estimating shape from shading using the light source coordinate system [J]. Artificial Intelligence, 1985(26):125-143.
- [9] Tsai P S, Shah M. Shape from Shading Using Linear Approximation [J]. Image and Vision Computing J., 1994,12(8):487-498.
- [10] 廖熠,赵荣椿.从明暗恢复形状(SFS)的几类典型算法分析与评价[J].中国图像图形处理学报,2001,6(10):953-961.
- [11] 马银平,李建英,宣亮亮.基于粗糙表面模型的三维形貌恢复研究[J].计算机技术与发展,2009,19(7):102-104.
- [12] Ikeda O. A Novel Shape-From-Shading Algorithm Using Jacobi Iterative Method and Bi-Directional Estimation [C]// Proc. IASTED CGIM. [s.l.]:[s.n.], 2002.

- [3] 王建文,王敏.基于双目立体视觉的鞋楦三维建模[J].计算机技术与发展,2009,19(4):224-230.
- [4] 金涛,童水光,颜永年.逆向工程技术[M].北京:机械工业出版社,2003.
- [5] 刘江涛,张爱武,臧克.3维数字化技术在考古中的应用[J].中国图学学报,2008(4):654-657.
- [6] 郑德华. ICP 算法及其在建筑物扫描点云数据配准中的应用[J].测绘科学,2007(2):31-32.
- [7] 张广鹏,张艳宁,郭哲.基于精确主轴分析及 ICP 的三维人脸配准[J].计算机工程与应用,2006,42(29):62-64.
- [8] 郭祥,刘卉.三维激光扫描技术及其在地质中的应用展望[J].软件导刊,2009(3):183-185.
- [9] 潘小林.三维曲面匹配技术研究[D].南京:南京航空航天大学,2004.
- [10] Pulli K. Multi-view registration for large data sets [C]//Proceedings of the 2nd International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling. Ottawa: [s.n.], 1999:160-168.
- [11] Preparata F, Shamos M. Computational Geometry: An Introduction [M]. New York: Springer; Berlin: Heidelberg, 1986.
- [12] 刘江涛,张爱武.三维数字化技术在三星堆遗址中的应用[J].首都师范大学学报(自然科学版),2007(4):68-71.