

# 实时稳定的二维烟雾模拟

褚曦丹<sup>1</sup>, 汪继文<sup>1,2</sup>, 刘 君<sup>1</sup>

(1. 安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039;

2. 安徽大学 计算机科学与技术学院, 安徽 合肥 230039)

**摘 要:**烟雾模拟是计算机动画模拟的重要组成部分。在模拟过程中保证实时性和稳定性是烟雾动画模拟的一个重要方面。该文的目的是在计算机上模拟出真实感的烟雾。文中采用无粘不可压欧拉方程作为烟雾的基本物理模型, 对这种简化的流体方程求解可以加快计算的速度, 使模拟的速度加快。数值上, 引入了 CIP 方法的一种改进形式 USCIP 方法来求解 N-S 方程的对流项, 该方法是无条件稳定的。求解方法的稳定实现了大时间步长模拟, 保证了模拟实时性和稳定性, 最后模拟得到二维的烟雾效果。实验证明本方法能实时稳定地模拟出具有真实感的二维烟雾效果。

**关键词:**烟雾模拟; Navier-Stokes 方程; USCIP 方法; 对流项

**中图分类号:** TP31

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2011)05-0091-04

## Stable and Real-Time Simulation of 2D Smoke

CHU Xi-dan<sup>1</sup>, WANG Ji-wen<sup>1,2</sup>, LIU Jun<sup>1</sup>

(1. Ministry of Education Key Laboratory of Computing & Signal Processing,

Anhui University, Hefei 230039, China;

2. Computer Science and Technical Institute, Anhui University, Hefei 230039, China)

**Abstract:** The smoke simulation plays an important role in computer animation. During the smoke simulation, stability to ensure real-time simulation is an important aspect. The purpose of this paper is to simulate realistic smoke on the computer. Use the inviscid and incompressible Euler equations as a basic physical model of smoke, solving the simplified fluid equation can accelerate the speed of calculation, then speed up the speed of the simulation. Numerically, the USCIP method which is a modified form the CIP method, is proposed to solve the advection item of Navier-Stokes. The method is unconditionally stable. The big time step can be taken to ensure real-time simulation. Finally, get the simulation results of 2D smoke. The experiment shows that the algorithm is simple and stable to achieve photorealistic 2D smoke simulation in real time.

**Key words:** smoke simulation; Navier-Stokes equation; USCIP method; advection item

## 0 引言

对于自然界现象的动画模拟已经成为计算机图形学中的热点之一。自然现象中常见的烟雾模拟因为其广泛的应用前景而吸引了众多学者的关注。它可以应用于电影特效、复杂环境仿真、游戏视频、各种飞行模拟等方面。对于烟雾的模拟, 一种是忽略烟雾的速度直接模拟其浓度变化<sup>[1]</sup>, 但这种方法不能逼真地模拟烟雾的变化。另一种是利用流体力学<sup>[2]</sup>来模拟, 它一般通过所模拟现象的物理模型, 求解其物理学方程来模拟它的运动规律, 以此来得到比基于粒子系统模拟

时更加逼真的效果。

利用 N-S 方程来描述烟雾等流体的运动, 因为其遵循流体的物理规则, 可得到较为真实的效果。而烟雾模拟的视觉质量很大一部分是依靠其 N-S 方程对流项求解的精确度上。1999 年, Stam<sup>[3]</sup>引入半拉格朗日方法求解对流项, 它是无条件稳定的, 但会带来大量的数值耗散, 使烟雾失去细节。Song<sup>[4]</sup>等在 2005 年提出了采用 CIP 方法求解对流项, 提高了空间精度。CIP 方法是一个三阶的对流求解方法, 这种方法的优点是简便, 直观并且易于推广到多维情形。其对对流项的高阶求解, 可以得到流体的丰富细节。但不幸的是这种方法不稳定。继而 Yabe<sup>[5,6]</sup>等提出了一种改进的 CIP 方法-RCIP 方法。RCIP 方法比前一种方法更为稳定, 但它不是无条件稳定的。为了弥补这一缺陷, Young Song<sup>[7]</sup>等人提出了 USCIP 这种无条件稳定的方法, 减少烟雾模拟耗散。

收稿日期: 2010-09-23; 修回日期: 2011-01-06

基金项目: 安徽省自然科学基金(090412045)

作者简介: 褚曦丹(1986-), 女, 硕士研究生, 研究方向为计算机数值模拟; 汪继文, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算机数值模拟方法, 偏微分方程数值方法及应用。

文中采用流体力学中无粘不可压欧拉方程作为模拟烟雾的基本物理模型,这种简化的流体方程求解可加快计算速度。为满足烟雾模拟的实时性和稳定性的需要,把 USCIP 方法引入到 N-S 方程对流项求解中,该方法无条件稳定减少了烟雾模拟的数值耗散。并允许自定义烟雾的初始位置及风力大小、方向,以得到更为真实可控的二维烟雾模拟效果。

## 1 物理模型

在众多流体方程中,Navier—Stokes 方程是描述流体运动最理想的方程。在航天航空科学、水动力学、石油工业等离子体物理、磁流体以及流体机械学等领域,它要么单独出现,要么与其他方程耦合出现。因此,Navier—Stokes 方程在理论和实践中有着重要的意义。一个浓度和温度守恒的流体场可由速度场  $u$  和压力场  $p$  来表示。

不可压流的 Navier—Stokes 方程的欧拉形式如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(u \cdot \nabla)u - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u + f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

式(1)为动量方程保证动量守恒。方程(2)为连续方程保证质量守恒。文中只描述烟雾运动,流体的粘度效果在模拟气体运动中可以忽略不计。所以烟雾运动的物理模型采用无粘不可压欧拉方程组,简化数值模拟计算量。其无粘不可压欧拉方程如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(u \cdot \nabla)u - \nabla p + f \quad (3)$$

其中(3)式的右边第一项为对流项,第二项为压强项,第三项为外力项。因为要计算密度随速度场的改变,通过下式对浓度场进行计算:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(u \cdot \nabla)\rho + \rho_0 \quad (4)$$

$\rho_0$  为外界向网格中补充的密度。烟雾密度一般在  $[0,1]$  之间取值,密度为 0 时说明该网格内无烟雾粒子。

## 2 基于 USCIP 方法 N-S 方程对流项求解

立方插值伪质点(Cubic-Interpolated Pseudo-particle, CIP)方法是由 Yabe<sup>[8]</sup>等人提出的一种非守恒的显式数值方法。它是一种显式格式,方程的局部线性化及数值解插值是其构造的关键。CIP 方法<sup>[9,10]</sup>已经被利用到可压缩流、不可压缩流、多相流等问题中。其通过三次多项式插值得到节点的函数值。一般在一维中,N-S 方程的对流项可写为下面的形式。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

为解决上式,CIP 方法利用半拉格朗日法。半拉格朗日方法是欧拉法和拉格朗日方法的结合,它利用欧拉法的规则性和拉格朗日法的稳定性,保证了求解对流项的有效性和任意时间步长稳定。半拉格朗日法的核心思想是将每个网格单元看作是一个粒子,采用随速度场回溯追踪粒子的方法,并需要根据周围的点进行插值。

对于式(5),其对空间变量  $x$  求导可得式(6):

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6)$$

采用 CIP 方法求解等式(6),可以减少数值耗散。假设网格距离  $(x_{i+1} - x_i)$  为 1。 $p$  为回溯点,它的  $\Phi$  值使用立方样条插值可近似写成(7)式。

$$\Phi(p) = [(C_0 p + C_1)p + \varphi_x]p + \varphi_i \quad (7)$$

其中系数  $C_0, C_1$  可用  $\varphi$  和  $\varphi_x$  得到,见下式:

$$C_0 = \varphi_x + \varphi_{x,i} - 2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \quad (8)$$

$$C_1 = 3(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - 2\varphi_x - \varphi_{x,i} \quad (9)$$

将这种方法推广到多维情况,Yabe<sup>[5,6]</sup>和 Aoki<sup>[5,6]</sup>提出了二维和三维多项式。对于二维,其多项式近似表达为:

$$\Phi(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq 3} C_{ij} x^i y^j \quad (10)$$

这就是最初的 CIP 公式。它是三阶精度,但并不稳定。USCIP 方法是 Song<sup>[7]</sup>等人对 Yabe<sup>[5,6]</sup>提出的多维多项式进行了一定的修改所得的一种新的方法。对于二维,其在(10)式的基础上添加了两项,多项式可近似写成:

$$\Phi(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq 3} C_{ij} x^i y^j + C_{31} x^3 y + C_{13} x y^3 \quad (11)$$

下面对式(11)的各系数进行求解。 $\varphi_{00}, \varphi_{10}, \varphi_{01}, \varphi_{11}$  为每个网格角的物理值,  $\varphi_x = \partial \varphi / \partial x$ ,  $\varphi_y = \partial \varphi / \partial y$ ,  $\varphi_{x00}, \varphi_{x10}, \varphi_{x01}, \varphi_{x11}, \varphi_{y00}, \varphi_{y10}, \varphi_{y01}, \varphi_{y11}$  为各网格边角的导数值。则系数  $C_{00} \cdots C_{31}$  由下列式子给出:

$$C_{00} = \varphi_{00}$$

$$C_{10} = \varphi_{x00}$$

$$C_{01} = \varphi_{y00}$$

$$C_{20} = 3(\varphi_{10} - \varphi_{00}) - \varphi_{x10} - 2\varphi_{x00}$$

$$C_{02} = 3(\varphi_{01} - \varphi_{00}) - \varphi_{y01} - 2\varphi_{y00}$$

$$C_{30} = -2(\varphi_{10} - \varphi_{00}) + \varphi_{x10} + \varphi_{x00}$$

$$C_{03} = -2(\varphi_{01} - \varphi_{00}) + \varphi_{y01} + \varphi_{y00}$$

$$C_{21} = 3\varphi_{11} - 2\varphi_{x01} - \varphi_{x11}$$

$$-3(C_{00} + C_{01} + C_{02} + C_{03}) - C_{20}$$

$$C_{31} = -2\varphi_{11} + \varphi_{x01} - \varphi_{x11}$$

$$-2(C_{00} + C_{01} + C_{02} + C_{03}) - C_{30}$$

$$C_{12} = 3\varphi_{11} - 2\varphi_{y10} - \varphi_{y11}$$

$$-3(C_{30} + C_{20} + C_{10} + C_{00}) - C_{02}$$

$$\begin{aligned} C_{13} &= -2\varphi_{11} + \varphi_{y10} - \varphi_{y11} \\ &\quad - 2(C_{00} + C_{10} + C_{20} + C_{30}) - C_{03} \\ C_{11} &= \varphi_{x01} - C_{13} - C_{12} - C_{10} \end{aligned} \tag{12}$$

将各系数代入式(11),即可求出该位置的  $\Phi$  值。改进的 CIP 方法是无条件稳定的,通过增强对流本身来减少耗散。利用该方法求解对流项,可以使烟雾模拟更具实时性、真实性。

3 求解方法

文中采用欧拉法简化 N-S 方程的求解过程。欧拉法是基于网格的一种方法,将场景划分为  $(N + 2) \times (N + 2)$  的二维网格空间,其中最外围的一层网格作为边界<sup>[11,12]</sup>。其边界条件是假设流体在一个固态的墙内,没有流体可以通过该墙。简单的说即在垂直墙面的水平速度分量为 0,水平墙面的垂直速度分量为 0。速度和浓度定义于网格中心点位置。流体场网格划分见图 1。

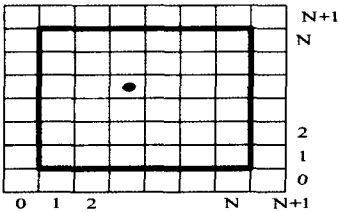


图 1 流体场网格划分

N-S 方程的求解分为 3 个部分,烟雾从当前状态过渡到下一状态受到外力、对流及压强的影响。采用分步求解法求解式(3)速度场和式(4)浓度场。速度场的一般求解步骤如下所示:

$$u_0 \xrightarrow{\text{外力作用}} u_1 \xrightarrow{\text{对流作用}} u_2 \xrightarrow{\text{压强作用}} u_3$$

对于速度场的求解,首先考虑外力  $f$  的影响。假设在  $\Delta t$  时间内,外力  $f$  恒定不变,则在  $\Delta t$  时间外力  $f$  对速度场的影响可用下式近似计算:

$$u_1(x) = u_0(x) + \Delta t f(x, t) \tag{13}$$

对流项的求解采用上面介绍的 USCIP 方法进行计算。

最后考虑压强项的影响,即  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p$ 。采用高斯-塞德尔迭代法求解压强泊松方程,其中上标  $k$  表示第  $k$  次迭代,即:

$$p_{i,j}^{k+1} = \frac{p_{i+1,j}^k + p_{i-1,j}^{k+1} + p_{i,j+1}^k + p_{i,j-1}^{k+1} - h^2 \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot u_2}{4} \tag{14}$$

$h$  为空间步长,并且  $\Delta x = \Delta y = h$ 。由  $u_3 = u_2 - \Delta t \nabla p$  求出当前速度。

按照 Stam<sup>[3]</sup>的算法对式(4)浓度场进行计算,

初始速度场  $u(t)$ , 计算  $\Delta t$  后的速度  $u(t + \Delta t)$ 。由初始的浓度场  $\rho(t)$ , 根据  $u(t + \Delta t)$ , 求取新的浓度场  $\rho(t + \Delta t)$ 。步骤如下:

$$\rho(t) \xrightarrow{\text{浓度补充}} \rho_1 \xrightarrow{\text{扩散作用}} \rho_2 \xrightarrow{\text{随 } u \text{ 移动}} \rho(t + \Delta t)$$

浓度补充是指烟雾扩散的过程中,需要在烟雾起始位置补充新的浓度。当只考虑一团烟雾自由运动时,则不需要另外补充新的浓度。

扩散作用是指相邻网格单元的烟雾浓度相互对流,从浓度高的网格向浓度低的网格单元运动。对于网格  $(i, j)$ , 它与网格  $(i - 1, j), (i + 1, j), (i, j - 1), (i, j + 1)$  直接相邻。设网格  $(i, j)$  的浓度为  $x_0$ , 则它与相邻网格的浓度差如下式所示:

$$x_0(i - 1, j) + x_0(i + 1, j) + x_0(i, j - 1) + x_0(i, j + 1) - 4x_0(i, j) \tag{15}$$

可得到线性方程为:

$$x_0(i, j) = x_1(i, j) - k \cdot dt [x_1(i - 1, j) + x_1(i + 1, j) + x_1(i, j - 1) + x_1(i, j + 1) - 4x_1(i, j)] h^2 \tag{16}$$

再通过迭代法求取该线性方程得到下一时刻该网格的浓度。

浓度随着当前速度  $u$  移动时,视各单元网格中的烟雾为一个独立的粒子,根据当前的速度求取下一个时刻各粒子的新位置,再重新插值计算新的浓度场。

4 实验结果

文中实验的硬件环境是 Intel-Pentium 3.00GHz, 内存为 1.00GB 的 PC 机;软件平台是开放图形库 OpenGL<sup>[13]</sup>和 VC++。系统的网格分辨率为  $64 \times 64$ 。

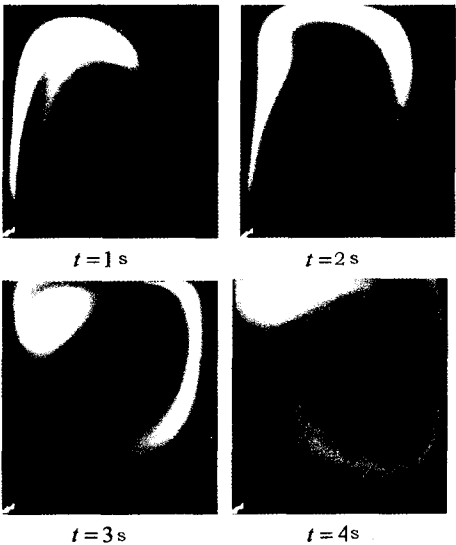


图 2 初始浓度定义在空间左下角所得到的模拟效果

图 2 是将初始的烟雾定义在模拟空间的左下角,并设定风向是自左向右所产生的模拟效果。实验中,允许自定义烟雾初始位置及风力方向,使烟雾模拟更加实时可控。图 3 为利用一般线性插值方法求解对流项所描述的烟雾效果。图 4 是利用 USCIP 方法求解对流项所得到的模拟效果。分别截取了相应的  $t=1\text{s}$  到  $t=4\text{s}$  的烟雾形状。从对比中可以看出用线性插值求解对流项所得到的模拟效果产生了耗散,其不是稳定的。而用 USCIP 方法求解对流项所得出的效果是稳定的,减少了耗散。其模拟的烟雾效果表现了更好的流动细节。

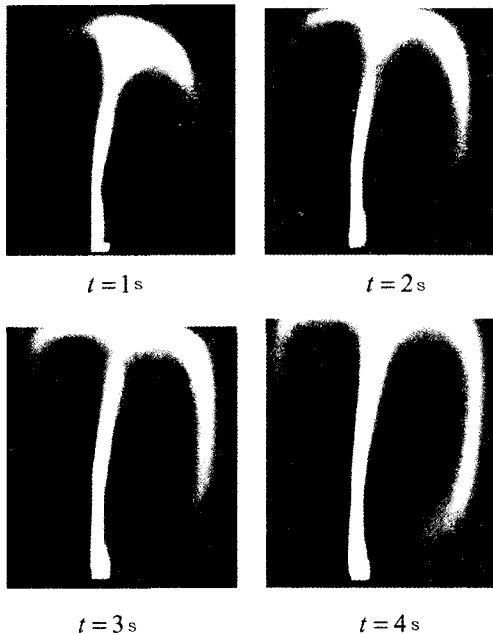


图 3 线性插值方法求解对流项的模拟效果

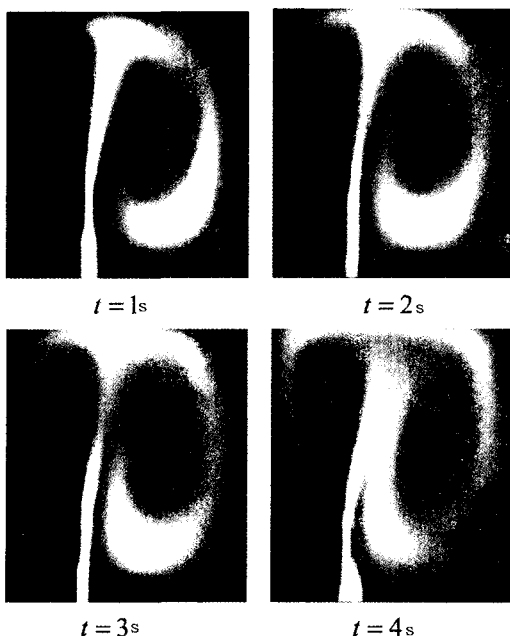


图 4 USCIP 方法求解对流项的模拟效果

## 5 结束语

烟雾模拟是一项复杂的课题。文中采用无粘不可压欧拉方程作为烟雾物理模型,与完整的 N-S 方程相比,它忽略了扩散项,简化了数值模拟计算。从烟雾模拟实时性与稳定性的角度出发提出了利用 USCIP 方法求解 N-S 方程对流项,该方法对对流项的稳定求解,可以获得更多的烟雾模拟细节。并用高斯-塞德尔迭代求解压强泊松方程。上述方法保证了模拟的稳定性和实时性,减少了数值耗散。

文中方法与传统方法相比,能实时稳定地模拟出具有真实感的二维烟雾。

### 参考文献:

- [1] Ebert D S, Musgrave K, Peachy D. Texturing and modeling: A procedural approach [M]. [s. l.]: AP Professional, 1994: 267-294.
- [2] 刘导治. 计算流体力学基础 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989.
- [3] Stam J. Stable fluids [C]//Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH. Los Angeles, California: [s. n.], 1999: 121-128.
- [4] Song O Y, Shin H. Stable but nondissipative water [J]. ACM Transaction on Graphics, 2005, 24(1): 81-97.
- [5] Yabe T, Xiao F, Nizam G. Constructing a multi-dimensional oscillation preventing scheme for the advection equation by a rational function [J]. Computer Physics Communications, 1996, 127(7): 103-118.
- [6] Xiao F, Yabe T, Nizam G. Constructing oscillation preventing scheme for the advection equation by a rational function [J]. Computer Physics Communications, 1996, 93(1): 1-12.
- [7] Song Y, Kim D. A Sime-lagrangian CIP fluid solver without dimensional Splitting [C]//Proc. of Computer Graphics Forum. [s. l.]: [s. n.], 2008: 467-474.
- [8] Selle A, Fedkiw R, Kim B, et al. An unconditionally stable maccormack method [J]. Journal of Scientific Computing, 2008, 35(2-3): 350-371.
- [9] 魏金凤, 曾德顺, 黄自萍. 求解非定常不可压 Navier-Stokes 方程的一种新方法 [J]. 同济大学学报, 2001, 29(11): 1261-1265.
- [10] 王景焄, 于长平, 刘凯欣. 几种差分格式对于流体弹塑性模型的适应性分析 [J]. 计算机力学学报, 2006, 23(1): 1-6.
- [11] 孙洪全. 基于物理的不可压缩流体动画模拟 [J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2008, 26(6): 743-745.
- [12] 谢晓强. 不可压流体的边界层问题 [J]. 数学年刊, 2009, 30A(3): 309-332.
- [13] 江兆尧, 路游, 贾广忠, 等. 基于 OpenGL 的光线投射算法的研究 [J]. 计算机技术与发展, 2010, 20(3): 218-224.