

多阈值系统中高斯混合噪声改善信息的传输□

王友国, 刘沁雨

(南京邮电大学理学院, 江苏南京 210046)

摘要:讨论高斯混合噪声下多阈值系统中的随机共振现象。对于单峰噪声, 当输入信号在阈上时, 互信息随着噪声的增强单调递减, 噪声总是不利于信息的传输; 当信号在阈下时, 互信息随着噪声的增强先递增然后再递减, 适量的噪声能改善信息传输, 随机共振现象存在。对于双峰噪声, 信号在阈下或阈上, 噪声有时能够改善信息的传输, 随机共振和阈上随机共振存在。这些结果说明多阈值系统中噪声改善信息的传输依赖于噪声类型, 拓展了随机共振和阈上随机共振在多元信息传输中的应用。

关键词:互信息; 随机共振; 阈上随机共振; 高斯混合噪声

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2011)04-0120-03

Gaussian Mixture Noise to Improve Information Transmission in Multi-threshold System

WANG You-guo, LIU Qin-yu

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications,
Nanjing 210046, China)

Abstract: Stochastic resonance in multi-threshold systems is studied for Gaussian mixture noises. For the single-peak Gaussian mixture noise, when the input signal is supra-threshold, mutual information monotonically decrease as the noise intensity increases, noise always deteriorate information transmission. When the input signal is sub-threshold, mutual information first increase and then decline as the noise intensity increases, some noise can improve information transmission, stochastic resonance (SR) exists. For Bimodal Gaussian mixture noise, when the signal is sub-threshold or supra-threshold, noises sometimes can also improve information transmission, SR and supra-threshold stochastic resonance (SSR) exist. These results indicate that noise in multi-threshold systems to improve information transmission depends on the noise types, and extend the application of SR and SSR in the multi-dimensional information transmission.

Key words: mutual information; stochastic resonance; supra-threshold stochastic resonance; Gaussian mixture noise

0 引言

线性系统中, 噪声总是恶化信号的传输或处理。然而在一些非线性系统中, 适量的噪声可以使系统的性能得以改善, 这种现象称为随机共振 (SR, Stochastic Resonance)^[1,2]。

近年来, 国内外学者往往基于单阈值的非线性系统研究不同噪声改善信息的传输、改善信号的相关性、改善信号的检测与估计等的随机共振现象, 取得了许多有价值的成果^[3-15]。在单阈值系统中, 对于单峰噪声, 只有当输入信号在阈下时 SR 现象存在; 当噪声为双峰时, 信号在阈下或阈上, SR 或者阈上随机共振

(SSR, Supra-threshold Stochastic Resonance) 有时也存在^[14,15]。多阈值系统中的 SR 现象研究较少, 文献^[16]曾有过讨论。

最近我们基于互信息在四种典型单峰噪声 (均匀噪声, 高斯噪声, 拉普拉斯噪声, 柯西噪声) 下研究了多阈值系统中的信息传输, 得到仅当信号在阈下时 SR 现象存在^[17]。文中主要讨论多阈值系统中高斯混合噪声改善信息传输的 SR 和 SSR 现象。

1 多阈值系统、互信息和高斯混合噪声

1.1 多阈值系统

设 x 是一随机信号, 其可能的取值为 $\{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, η 是密度函数为 $f_\eta(z)$ 的平稳白噪声, x 与 η 相互独立。噪声信号 $(x + \eta)$ 经过多阈值系统的输出:

收稿日期: 2010-07-16; 修回日期: 2010-10-07

基金项目: 江苏省自然科学基金 (08KJB510012)

作者简介: 王友国 (1968-), 男, 江苏淮安人, 教授, 硕士生导师, 研究方向为信号与信息处理, 应用数学。

$$y = \begin{cases} -n & x + \eta < (-n + 0.5)u \\ j & (j - 0.5)u < x + \eta < (j + 0.5)u \\ n & x + \eta > (n - 0.5)u \end{cases} \quad (1)$$

这里 $j \in [-n + 1, n - 1]$ 且 $j \in Z$, $0.5u$ 是系统的阈值^[16,17]。

设 x 取每个值的先验概率为 $p_i (-n \leq x \leq n, i \in Z)$, 则对任意 $x (-n \leq x \leq n, x \in Z)$, 多阈值系统的转移概率:

$$p(y = n/x) = p(x + \eta > (n - 0.5)u) = p(\eta > (n - 0.5)u - x) = 1 - F_\eta((n - 0.5)u - x) \quad (2)$$

$$p(y = -n/x) = p(x + \eta < (-n + 0.5)u) = p(\eta < (-n + 0.5)u - x) = F_\eta((-n + 0.5)u - x) \quad (3)$$

$$p(y = j/x) = p((j - 0.5)u < x + \eta < (j + 0.5)u) = p((j - 0.5)u - x < \eta < (j + 0.5)u - x) = F_\eta((j + 0.5)u - x) - F_\eta((j - 0.5)u - x) - n + 1 \leq j \leq n - 1, j \in Z \quad (4)$$

把(2)-(4)代入全概率公式:

$$p(y = j) = \sum_{i=-n}^n p_i * p(y = j/x = i) \quad (5)$$

就可以得到系统的输出概率 $p(y = j)$, $j \in [-n + 1, n - 1]$ 且 $j \in Z$ ^[17]。

1.2 互信息

多阈值系统输入信号 x 和输出信号 y 间的互信息

$$I(x, y) = H(y) - H(y/x) = - \sum_{j=-n}^n p(y) * \log_2(p(y)) + \sum_{i=-n}^n p_i \sum_{j=-n}^n p(y/x) \log_2(p(y/x)) \quad (6)$$

这里, $H(y)$ 是信息熵, $H(y/x)$ 是条件熵; $p(x)$ 和 $p(y)$ 分别是输入和输出的概率, $p(y/x)$ 是条件概率。

为了简单, 同样取 $n = 1$, 且令 x 等可能的取值, 即 $p_i = \frac{1}{3} (-1 \leq x \leq 1)$, 此时把(2)-(5)代入(6), 可得互信息^[17]:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} (3 - F_\eta(u - 1) - F_\eta(u + 1) - F_\eta(u)) * \\ &\log_2 \left\{ \frac{1}{3} (3 - F_\eta(u - 1) - F_\eta(u + 1) - F_\eta(u)) \right\} + \\ &\frac{1}{3} (2F_\eta(u - 1) + 2F_\eta(u + 1) + 2F_\eta(u) - 3) \\ &\log_2 \left\{ \frac{1}{3} (2F_\eta(u - 1) + 2F_\eta(u + 1) + 2F_\eta(u) - 3) \right\} + \\ &\frac{2}{3} \{ (1 - F_\eta(u - 1)) \log_2(1 - F_\eta(u - 1)) + (1 - F_\eta(u + 1)) \log_2(1 - F_\eta(u + 1)) + \\ &(F_\eta(u - 1) + F_\eta(u + 1) - 1) \log_2(F_\eta(u - 1) + F_\eta(u + 1) - 1) \} + \frac{1}{3} \{ 2(1 - F_\eta(u)) \log_2(1 - F_\eta(u)) + \\ &(2F_\eta(u) - 1) \log_2(2F_\eta(u) - 1) \} \end{aligned}$$

$$- 1) \} \quad (7)$$

1.3 高斯混合噪声

具有标准方差 σ 和参数 m 的高斯混合噪声的概率密度函数^[14,15]:

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 - m^2)}} \left[\exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2(\sigma^2 - m^2)}\right) + \exp\left(-\frac{(x + m)^2}{2(\sigma^2 - m^2)}\right) \right], \sigma \geq m \quad (8)$$

$m = 0$ 时即为高斯噪声。图1给出了不同参数 m ($m = 2, 3, 4, 6, 8, 10$) 的高斯混合噪声密度函数 ($\sigma = m + 1$), 由此可以看出, 随着 m 逐渐增大, 噪声由单峰逐步过渡到双峰。

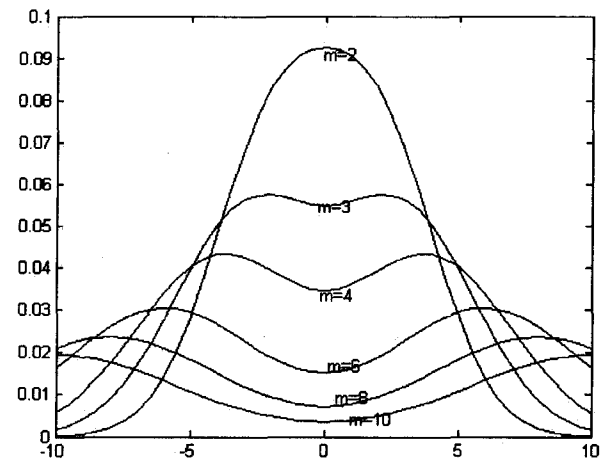
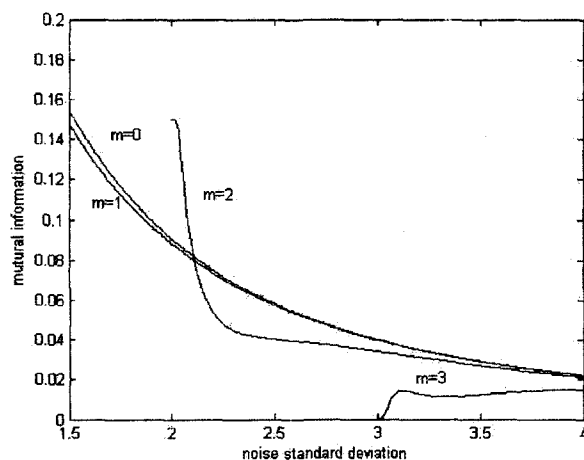
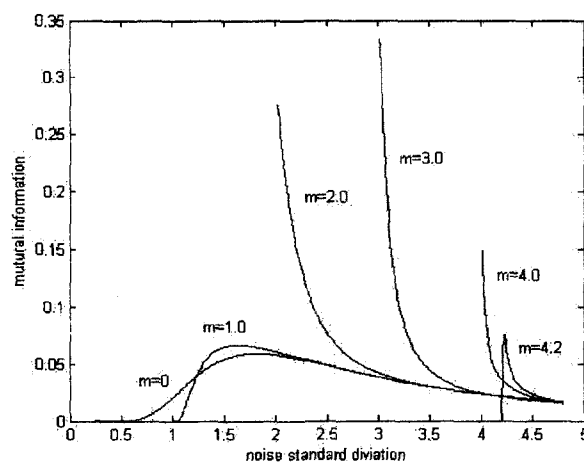
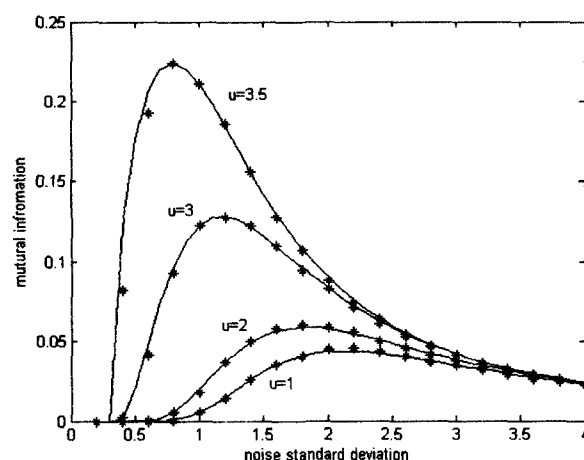


图1 不同参数 m 的高斯混合噪声概率密度函数

2 噪声改善信息的传输

图2-4中的实线是根据式(7)得到的互信息随噪声强度变化的理论结果, 图4中的数据点是计算机仿真结果。当输入信号在阈上 ($0.5u = 0.5 < 1$), 图2显示对于 $m = 0, 1, 2$ 的单峰噪声, 互信息单调下降, 噪声总是恶化信息的传输; 但对于 $m = 3$ 的双峰噪声, 互信息先是单调递增, 到达一个最大值后又开始递减, 适量噪声改善了信息的传输, SSR 现象存在。当输入信号在阈下 ($0.5u = 1.5 > 1$), 图3显示对于 $m = 2$ 的单峰噪声和 $m = 3, 4$ 的双峰噪声, 互信息单调下降, 没有出现 SR 现象; 而对于 $m = 0, 1$ 的单峰噪声和 $m = 4, 2$ 的双峰噪声, 互信息显示为上凸的变化, SR 现象存在。在图4中, 对于 $m = 5$ 的双峰噪声, 随着阈值 u 从 1, 2 到 3, 3.5 信号从阈上 ($0.5u \leq 1$) 到阈下 ($0.5u > 1$), 理论和仿真一致显示信息的非单调变化, SSR 和 SR 都存在。这些结果说明多阈值系统中噪声改善信息的传输与单阈值系统一样是一个很复杂的现象, 它强烈地依赖于噪声类型, 是噪声、信号与系统“协同作用”的结果。

图 2 $u=1$ 时不同噪声参数 m 下的互信息图 3 $u=3$ 时不同噪声参数 m 下的互信息图 4 不同 u 时 $m=5$ 的双峰噪声下的互信息

3 结束语

文中基于互信息研究了高斯混合噪声下多阈值系统中的 SR 现象。对于单峰噪声,仅当信号在阈值下时,噪声能改善信息传输,SR 现象存在;对于双峰噪声,信号在阈值下或阈值上,噪声有时能够改善信息的传输,SSR 和 SR 随机共振存在。这些结果说明多阈值系统中噪

声改善信息的传输与单阈值系统一样依赖于噪声类型,拓展了 SSR 和 SR 在多元信息传输中的应用。

参考文献:

- [1] Benzi R, Strueter A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance[J]. J Phys A, 1981, 4(11):453-457.
- [2] Mcnamara B, Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance[J]. Physical Review A, 1998, 39:4854-4869.
- [3] Collins J J, Chow C C, Imhoff T T. Stochastic resonance without tuning[J]. Nature, 1995, 376(20):236-238.
- [4] 张雷,宋爱国. 随机共振在信号处理中应用研究的回顾与展望[J]. 电子学报, 2009, 37(4):811-818.
- [5] 叶青华,黄海宁,张春华. 用于微弱信号检测的随机共振系统设计[J]. 电子学报, 2009, 37(1):216-220.
- [6] 王友国,吴乐南. 离散时间系统中的噪声辅助信号传输[J]. 电子学报, 2009, 37(10):231-234.
- [7] Kay S. Can detectability be improved by adding noise? [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2000, 7(1): 8-10.
- [8] Chapeau-Blondeau F. Stochastic resonance for an optimal detector with phase noise[J]. Signal Processing, 2003, 83:665-670.
- [9] Zozor S, Amblard P O. Stochastic resonance in locally optimal detectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(12): 3177-3181.
- [10] Chen Hao, Varshney P K, Kay S M, et al. Theory of the stochastic resonance effect in signal detection: Part I-Fixed detectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(7):3172-3184.
- [11] Zhang Huiquan, Xu Bohou, Li Jianlong, et al. Evaluation of bistable systems for binary signal detection in symmetric non-Gaussian noise[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2010, 25:119-126.
- [12] Wang Youguo, Wu Lenan. Stochastic resonance and noise-enhanced Fisher information[J]. Fluctuation and Noise Letters, 2005, 5(3):435-442.
- [13] Chen Hao, Varshney P K, Michels J H. Noise enhanced parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(10):5074-5081.
- [14] Wang Youguo, Wu Lenan. Nonlinear signal detection from an array of threshold devices for non-Gaussian noise[J]. Digital Signal Processing, 2007, 17:76-89.
- [15] Wang Youguo, Wu Lenan. Noise-improved information transmission in a nonlinear threshold array for Gaussian mixture noise[J]. Journal of Southeast University, 2006, 22(1):31-34.
- [16] Gammaitoni L. Stochastic resonance in multithreshold systems[J]. Physics Letters A, 1995, 208:315-322.
- [17] 王友国,刘洪伟,罗辑. 基于互信息的多阈值系统中的随机共振现象研究[J]. 计算机技术与发展, 2010, 20(6): 89-92.