

# 求解分数阶微分系统的一种数值算法

覃迺智<sup>1</sup>, 周尚波<sup>2</sup>

(1. 南宁地区教育学院 数学与计算机科学系, 广西 南宁 530001;

2. 重庆大学 计算机学院, 重庆 400044)

**摘要:** 由于分数阶微分系统具有记忆功能, 在其求解过程中计算量较大。文中的目的是针对分数阶 Grunwald-Letnikov (GL) 定义, 研究并寻求一种求解分数阶微分方程的有效数值算法。首先由分数阶 GL 定义得出分数阶的数值计算公式, 进而从理论上分析了算法中分数阶项计算系数的特点, 结合计算机数值仿真的结果, 得出了远离当前时间的无穷小项一般不可忽略的结论, 并设计了一种合理有效的计算方法。计算机数值仿真的结果表明, 所设计的求解分数阶微分方程的算法精度高, 通用性好, 且易于编程实现。

**关键词:** 分数阶微分; 系数; 数值算法

中图分类号: TP301

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2011)01-0108-04

## Numerical Algorithm for Solving Fractional Order Differential Systems

QIN Nai-zhi<sup>1</sup>, ZHOU Shang-bo<sup>2</sup>

(1. Dept. of Mathematics and Computer Science, Nanning Prefecture Edu. Institute, Nanning 530001, China;

2. College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** The calculation work of solving a fractional order differential system is huge since it relating to history. In this brief, for the fractional order definition of Grunwald-Letnikov (GL), an effective numerical algorithm for solving fractional order differential systems is investigated. Firstly, the numerical calculation formula of fractional order definition of GL is designed. Secondly, the coefficients of the fractional order term are analyzed theoretically, combining with the computer simulation, conclude that the infinitesimal which long away from current can not be omitted. A reasonable effective algorithm is designed well. The results of computer simulation show that the proposed algorithm is a high precision, general one, and it is easy to be programmed.

**Key words:** fractional order differential; coefficient; numerical algorithm

## 0 引言

分数阶微积分建立至今已经有 300 多年的历史。近年来分数阶微积分学理论在很多领域都开始得到广泛的应用, 如各种材料的记忆、力学和电特性描述、岩石的流变性质描述、地震分析、粘弹性阻尼器、电力分形网络、分数阶正弦振荡器、机器人、电子电路、电解化学、分数电容理论、电极—电解质接口描述、分数阶 PID 控制器设计、粘弹性系统和柔软构造物体的振动控制、数字图像处理等等<sup>[1-6]</sup>。但由于早期计算机水平相对落后, 很难将分数阶微积分离散化数字实现。随着现代计算机硬件、软件以及计算智能的迅速发展, 分数阶系统数值解算法得到广泛的研究<sup>[7-10]</sup>, 文献

[7] 用分数阶的 RadauIIA 方法和分数阶的一般 Runge-Kutta 方法构造了求解非线性分数阶微分方程的高阶近似格式, 并证明了这两类方法的相容性和收敛性; 文献[8]对数值求解分数阶常微分方程预估校正法进行了研究, 并数值模拟了分数阶微分系统的动力学行为。在偏分数阶微分方程数值求解方面, 也取得了一些成果<sup>[11-13]</sup>。在文献[14]中, 提出了一种求解非线性分数阶微分方程的迭代算法, 在文献[15]中, 将该迭代算法与频域解法进行了比较, 并研究了非线性分数阶微分系统的混沌现象。由于分数阶微分系统具有记忆功能, 在其求解过程中, 计算量较大, 因而研究快速求解方法具有重要而实际的意义, 文中将对文献[14]的算法设计合理有效的计算方法。

## 1 求解分数阶微分系统算法

分数阶微积分有多种定义。如 Riemann-Liouville (RL) 微分定义:

收稿日期: 2010-05-18; 修回日期: 2010-08-08

基金项目: 国家自然科学基金 (60873200)

作者简介: 覃迺智 (1964-), 广西马山人, 讲师, 研究方向为计算机应用、算法设计与分析; 周尚波, 教授, 研究方向为信息安全、混沌及其控制理论。

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1)$$

由分部积分计算,可得:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

( $n < \alpha < n+1$ )

Caputo 的分数阶微分定义:

$${}_0 D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

在此研究的是 Grunwald-Letnikov (GL) 定义,它由函数高阶导数定义的推广而得到:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (4)$$

其中,  $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}$ .

引入 Gamma 函数,得:

$$\binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(v+j)}{\Gamma(v)j!} \quad v > 0, v \in \mathbb{R}$$

于是,有:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} \frac{\Gamma(v+j)}{\Gamma(v)j!} f(t-jh) \quad (5)$$

对于很多物理或实际工程应用中的函数而言, Grunwald-Letnikov 定义与 Riemann-Liouville 定义这两种定义是相互等同的。

设  $t_m = mh$ ,  $f_m = f(t_m)$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), 由极限的定义,则有

$${}_0 D_t^\alpha f(t_m) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^m \omega_j^{(\alpha)} f_{m-j} \quad (6)$$

其中:  $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ )。

利用(6)式,就可将分数阶微分离散化,从而数值求解分数阶微分方程,如对以下方程组离散化:

$$\begin{cases} F(t)y'(t) + G(t){}_0 D_t^{1/2} y(t) + y(t) = -1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

( $0 < t < 1$ )

$$\begin{aligned} & \text{得 } (y_m - y_{m-1})F_m h^{-1} + G_m h^{-1/2} \sum_{j=0}^m \omega_j^{(1/2)} y_{m-j} + y_m \\ & = -1 \end{aligned} \quad (8)$$

由此可得:

$$y_m = [F_m y_{m-1} - G_m \sqrt{h} \sum_{j=1}^m \omega_j^{(1/2)} y_{m-j} - h] / [F_m + G_m \sqrt{h} + h] \quad (9)$$

这是一个显式求解公式。对于隐式格式,可用迭

代方法求解<sup>[14,15]</sup>。

从式(9)可以看到,式中  $G_m \sqrt{h} \sum_{j=1}^m \omega_j^{(1/2)} y_{m-j}$  项要从初值计算到当前的前一个值之后再求和,并且每一步都需要重新计算,计算量大,随时间  $t$  逐渐增大,计算速度随之减慢。

## 2 算法设计

首先对  $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) 的特性进行讨论。

设  $0 < \alpha < 1$ , 将  $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$  改写成

$$\begin{aligned} (-1)^j \binom{\alpha}{j} &= (-1)^j \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} \\ &= (-\alpha) \times \frac{1-\alpha}{2} \times \frac{2-\alpha}{3} \times \dots \times \frac{(j-1)-\alpha}{j} \end{aligned}$$

由于  $0 < \alpha < 1$ , 对于任意整数  $l > 1$ , 有

$$l-2 < (l-1)-\alpha < l-1$$

对于任意  $j \geq l$ , 有

$$0 \leq \frac{l-2}{j} < \frac{(l-1)-\alpha}{j} < \frac{l-1}{j} < 1$$

$$\text{故 } (-1)^j \binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}$$

$\rightarrow 0 (j \rightarrow +\infty)$

即当  $j$  充分大时,  $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$  的值很小, 即随着时间的增大, 靠近当前时间的项贡献较大, 而远离当前时间的项贡献很小。表 1 是当  $\alpha = \frac{2}{3}$  时,  $\omega_j^{(\alpha)} =$

$(-1)^j \binom{\alpha}{j}$  的一些值。

表 1 当  $\alpha = \frac{2}{3}$  时,  $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$  的值

$j$	$\omega_j^{(\alpha)}$	$j$	$\omega_j^{(\alpha)}$	$j$	$\omega_j^{(\alpha)}$
20	$1.7 \times 10^{-3}$	200	$3.6484 \times 10^{-5}$	2000	$7.8406 \times 10^{-7}$
50	$3.7085 \times 10^{-4}$	500	$7.9094 \times 10^{-6}$	5000	$1.7023 \times 10^{-7}$
100	$1.1615 \times 10^{-4}$	1000	$2.4899 \times 10^{-6}$	10000	$5.3617 \times 10^{-8}$

由表 1 可见, 当  $j > 2000$  时,  $|\omega_j^{(\alpha)}| < 10^{-6}$ 。如果采用步长  $h = 0.0001$  进行计算, 影响的计算精度数量级为  $10^{-6}$ 。

当  $\alpha > 1$  时, 利用(2)式, 将  ${}_a D_t^\alpha y(t)$  化为如下格式:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(a) (t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \\ & \frac{1}{\Gamma(-\alpha+n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} y^{(n+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $n < \alpha < n + 1$ , 则有  $0 < \alpha - n < 1$ 。一般情况下,  $\alpha$  不是很大, 因而  $n$  也不是很大, 所以公式 (10) 中第一项  $\sum_{k=0}^n \frac{\gamma^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}$  的计算量是较小的, 而第二项则利用上述讨论的方法进行计算。

虽然远离当前的项的系数极小, 因而单项贡献极小, 但其积累的影响却不可忽视 (见第 3 节仿真实验), 对分数阶计算项进行合理设计, 可加快计算速度。由

$$\begin{aligned} (-1)^j \binom{\alpha}{j} &= (-1)^j \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \\ &= (-\alpha) \times \frac{1-\alpha}{2} \times \frac{2-\alpha}{3} \times \cdots \times \frac{(j-1)-\alpha}{j} \\ &= (-1)^{j-1} \binom{\alpha}{j-1} \times \frac{(j-1)-\alpha}{j} \end{aligned}$$

可知, 在计算分数阶项时, 对  $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$  依次递推计算, 并存储为数组, 在计算时调用, 能节省一定的时间。

### 3 仿真实验

对于分数阶微分系统方程 (7), 当取  $F(t) = f(t)/f'(t)$ ,  $G(t) = \lambda/f'(t)$ , 且  $f(t) = 1 - \sqrt{t}$ ,  $\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$  时, 方程 (7) 变为:

$$-2(1-\sqrt{t})\sqrt{t}y'(t) - 2\lambda\sqrt{t}D_t^{(1/2)}y(t) + y(t) = -1 \quad (11)$$

其解析解为  $y(t) = \sqrt{t}$ 。

采用 (9) 对 (11) 求解, 取  $h = 0.0001$  时, 其计算精度为  $10^{-3}$  级别<sup>[14]</sup>。表 2 为采用截短算法设计在双核 intel P8400, 主频 2.26G, 内存 2M 的计算机上运行的计算时间开销及最大计算误差结果, 图 1 为截短算法设计以  $h = 0.00001$ 、取和项后 10000 项计算的逼近效果。从图 1 可见, 尽管单项贡献极小, 且取到 10000 项, 误差较大, 逼近效果不好。

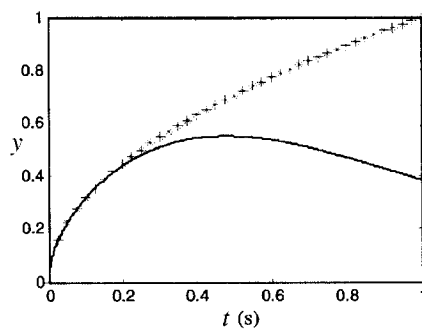
表 2 截短算法运行效果

算法	计算步长 $h=0.0001$		计算步长 $h=0.00001$	
	时间开销 (s)	最大绝对误差 (e)	时间开销 (s)	最大绝对误差 (e)
截短算法设计 (取和项后 2000 项)	0.755572	0.3608	162.584948	0.8731
截短算法设计 (取和项后 10000 项)		无截短	154.306746	0.6144

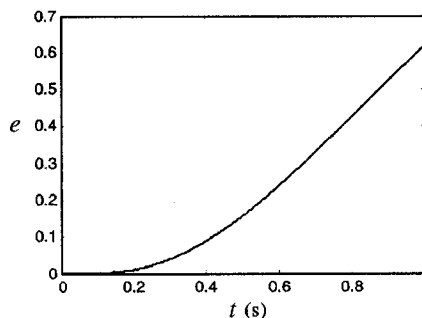
表 3 快速算法设计运行效果

算法	计算步长 $h=0.0001$		计算步长 $h=0.00001$	
	时间开销 (s)	最大绝对误差 (e)	时间开销 (s)	最大绝对误差 (e)
直接算法设计	2.425689	0.0068	275.35914	0.0022
快速算法设计	1.944561	0.0068	200.422789	0.0022

表 3 为采用第 2 节设计的快速算法设计计算的效果, 图 2 为直接计算或快速算法设计取  $h = 0.0001$  的计算逼近效果。由表 3 及图 2 可见, 逼近效果很好, 采用快速算法设计可节省计算量。

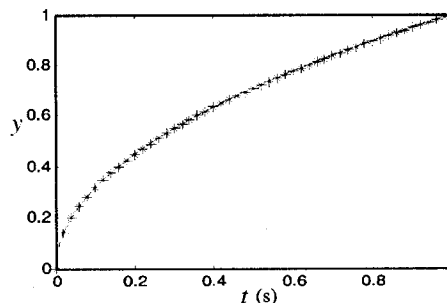


(a) 系统解

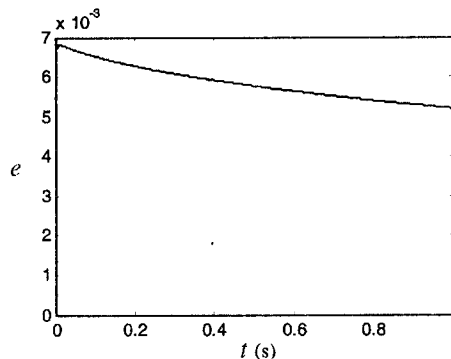


(b) 逼近绝对误差

图 1 截短算法设计  $h = 0.00001$ , 格式 (9) 计算的逼近效果



(a) 系统解



(b) 逼近绝对误差

图 2 直接计算或快速算法设计  $h = 0.0001$ , 格式 (9) 计算的逼近效果

## 4 结束语

由于分数阶微分系统具有记忆功能,求解过程计算量较大。文中对原有的求解非线性分数阶微分方程的算法进行研究,对算法系数的特性进行了分析,指出了虽然远离当前的项的系数极小,但其积累的影响却不可忽视,为此设计了一种合理有效求解非线性分数阶微分方程的算法,通用性好,易于编程实现。

### 参考文献:

- [1] Podlubny I. Fractional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [2] Fetecau C, Athar M, Fetecau C. Unsteady flow of a generalized Maxwell fluid with fractional derivative due to a constantly accelerating plate[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57: 596 - 603.
- [3] Xu Hang, Liao Shi-Jun, You Xiang-Cheng. Analysis of nonlinear fractional partial differential equations with the homotopy analysis method[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14: 1152 - 1156.
- [4] Bouafoura M K, Braiek N B.  $PI^{\alpha}D^{\alpha}$  controller design for integer and fractional plants using piecewise orthogonal functions[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(5): 1267-1278.
- [5] 李 卓. 粘弹性分数阶数模型及其在固体发动机上的应用[D]. 北京: 清华大学, 2000.
- [6] 蒲亦非, 王卫星. 数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则[J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1128-1135.
- [7] 王海燕. 求解分数阶微分方程的 Runge\_Kutta 方法[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2008.
- [8] 邓伟华. 分数阶微分方程的理论分析与数值计算[D]. 上海: 上海大学, 2007.
- [9] Marom O, Momoniat E. A comparison of numerical solutions of fractional diffusion models in finance[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(6): 3435 - 3442.
- [10] 王振滨, 曹广益. 分数阶动态系统的数值算法[J]. 系统仿真学报, 2004, 16(3): 477-484.
- [11] Wu J L. A wavelet operational method for solving fractional partial differential equations numerically[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 214: 31-40.
- [12] Yang Q, Liu F, Turner I. Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives[J]. Appl. Math. Modell, 2010, 34(1): 200-218.
- [13] 蔡 新. 解空间 Riesz 分数阶扩散方程的一种数值方法[J]. 高等学校计算数学学报, 2005, 27(专刊): 242-246.
- [14] Zhou Shangbo, Li Hua, Zhu Zhengzhou. Chaos control and synchronization in a fractional neural network system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 36(4): 973-984.
- [15] Xiao Ke, Zhou Shang-Bo, Zhang Wei-Wei. Numerical Solution for Fractional-order Differential System with Time-Domain and Frequency-Domain Methods[J]. Journal of Electronic Science and Technology of China, 2008, 6(3): 294-298.

(上接第 107 页)

源,同时将用户终端节点上文献进行有机的组织,构成易于本地和异地检索的局部文献库,从而有效提升网络文献共享系统的性能,降低网络文献共享系统的维护成本。

### 参考文献:

- [1] 吴贤奇. 现代文献信息检索[M]. 南京: 东南大学出版社, 2007.
- [2] 程维红, 任胜利, 王应宽, 等. 国外科技期刊开放存取网络平台[J]. 中国科技期刊研究, 2009, 20(1): 36 - 44.
- [3] 李志民, 万 猛. 网络时代的科技论文快速共享与多维表达研究[EB/OL]. 2010-04-29. [http://www.paper.edu.cn/lizhimin\\_jiaoyu\\_wangluo.php](http://www.paper.edu.cn/lizhimin_jiaoyu_wangluo.php).
- [4] 陈贵海, 李振华. 对等网络: 结构、应用与设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [5] 乐光学, 李仁发, 周祖德. 基于 Region 多层结构 P2P 计算网络模型[J]. 软件学报, 2005, 16(6): 1140-1150.
- [6] 中国期刊全文数据库介绍信息. 中国期刊网[EB/OL]. 2010-03-29. <http://dlib.cnki.net/kns50/Navigator.aspx>.
- [7] Lua E K, Crowcroft J, Pias M, et al. A survey and comparison of peer-to-peer overlay network schemes[J]. Communications Surveys & Tutorials, 2005, 7(2): 72-93.
- [8] 吴国庆. 对等网络技术研究[J]. 计算机技术与发展, 2008, 18(7): 100-103.
- [9] Cordasco G, Gargano L, Hammar M, et al. F-Chord: Improved uniform routing on Chord[C]// In: Proc. of the 11th Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO 2004), Smolenice Castle, 2004. Berkeley: Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 2004.
- [10] Ganesan P, Manku G S. Optimal Routing in Chord[C]// In: Proc. of the 15th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). New Orleans: [s. n.], 2004: 176-185.
- [11] Joung Y J, Wang J C. Reducing maintenance overhead in Chord via heterogeneity[C]// In: Proc. of the 5th IEEE International Symposium on Cluster Computing and the Grid (CCGrid'05). Washington, DC: IEEE Computer Society, 2005: 221-224.
- [12] 宁多彪, 陶中平, 吕光宏. 基于 PNS-PGrid 的 P2P 路由算法的设计与实现[J]. 计算机技术与发展, 2009, 19(12): 47-50.