

新的改进 AHP 算法研究及应用

曹黎侠,冯孝周

(西安工业大学 数理系,陕西 西安 710032)

摘要:构造一致性的判断矩阵是 AHP 的关键之一,意图提高判断矩阵满足一致性的可能性和 AHP 的性能。在尽量维护专家提供的原始数据基础之上,对不满足一致性的判断矩阵进行修正,改善了判断矩阵满足一致的可能性;从完全一致性矩阵的充要条件出发,对 T. L. Saaty 教授一致性的判别准则进行了改进。创立了一种新的改进的 AHP 算法,并把它应用于学生考查课成绩评定各个指标权值的确定。实例表明,改进的 AHP 算法较原 AHP 运算量大幅减少,提高了运行速度。

关键词:层次分析法;判断矩阵;一致性;考查课

中图分类号:O159

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2010)12-0115-03

A New Improved AHP Algorithm Research and Application

CAO Li-xia, FENG Xiao-zhou

(Math-Physical Department, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China)

Abstract: Constructed the judgment matrix which meets the consistency requirement is one of the key issues of AHP, intended to improve the consistency of the possibility of judgment matrix and performance of AHP. Revised judgment matrix which not meeting consistency, to improve original matrix consistency possibility on the basis of maintenance the raw data. From the necessary and sufficient conditions of completely consistent matrix, criteria of consistency of professor T. L. Saaty has been improved. Thereby create a new improved AHP method, and apply it to examine the course in determining the weights of evaluation indicators by students. Examples show that the improved algorithm is better than the original AHP in significantly reduced computation, improved the running speed.

Key words: AHP; judgment matrix; consistency; test class

0 引言

层次分析法 (Analytic Hierarchy Process, AHP) 是美国运筹学家 T. L. Saaty 于 20 世纪 70 年代提出的一种定性分析和定量分析相结合的评价决策方法^[1,2]。它通过建立问题的层次结构模型、构造各层的判断矩阵、进行层次单排序及一致性检验、进行层次总排序及一致性检验四个步骤来完成指标排序或权值的确定^[1,3]。在利用层次分析法分析问题,构造满足一致性要求的判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 AHP 的关键之一。但通常情况下给出的判断信息难以达到完全的一致性。T. L. Saaty 教授给出了通过一致性比例 $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{\lambda_{\max} - n}{(n-1)RI} < 0.1$ ^[1] 作为满意一致性判断的准则。如果说不满足该准则,就要对判断矩阵进行调整或重新构造。这样做不但增大了运算的计算量,而且

也没有充分尊重原始数据。文中从判断矩阵的修正及一致性判断两个方面进行研究,克服以上两个弊端,创立了一种新的改进算法。最后给出新的改进的 AHP 算法的一个应用实例。

学生考查课成绩的评定,一般是通过授课教师打分、同学互评、学生自评相结合,建立模糊综合评价模型,运用模糊评价的方法给出课程的成绩。然而影响成绩的各种指标权重的确定是评价是否科学的重要因素。考虑到成绩指标权值的重要性,文中在广泛搜集各方面的相关信息、并对数据进行分析与处理的基础之上,将这种新的改进 AHP 算法应用于学生考查课成绩评定各个指标权值的确定之中。为教师的教与学生的学提供有益的参考,促进课堂教学效果和学生学习积极性的提升。

1 新的改进 AHP 算法研究

1.1 判断矩阵的修正

如果判断矩阵中的元素满足^[4]: $a_{ij} > 0, a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}, a_{ii} = 1 (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称矩阵 A 为正互反矩阵。

收稿日期:2010-04-06;修回日期:2010-07-08

基金项目:陕西省教育科学计划项目自然专项项目(09JK480);西安工业大学重点教学改革研究项目(Z71112)

作者简介:曹黎侠(1971-),女,陕西西安人,副教授,研究方向为运筹学与控制论、决策分析及优化算法等。

定义 1^[4,5]: 设判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 如果对 $\forall i, j, k = 1, 2, \dots, n$, 都有 $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$ 成立, 则称判断矩阵 A 为一致性矩阵。

一致性矩阵具有如下性质:

定理 1^[5-7]: 判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 具有完全一致性的充分必要条件是 A 的最大特征值 $\lambda_{\max} = n$, 且其规范化的特征向量 $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_n)^T$ 为权重向量;

定理 2^[6,7]: 判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 具有完全一致性的充分必要条件是 $\forall i, j, k = 1, 2, \dots, n$, 都有 $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$ 成立。

由定义 1 及定理 2 知, 正互反矩阵 A 为一致性矩阵, 必有:

$$\forall i, j, k = 1, 2, \dots, n, a_{ij} = a_{ik}a_{kj} \quad (1)$$

对公式(1)两边关于 k 求和得^[8]:

$$a_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \quad (2)$$

其中式(1)是正互反矩阵 A 为一致性矩阵的充要条件, 式(2)为必要条件。

即若式(2)不成立, 则矩阵 A 一定不是一致性矩阵。从而式(2)成为判定一致性矩阵的前提条件, 构造:

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} & i < j \\ 1 & i = j \\ \frac{1}{b_{ji}} & i > j \end{cases} \quad (3)$$

因此, 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 不满足一致性, 用 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 作为 A 的修正矩阵, 改善了满足一致性的可能性; 若 A 是一致性矩阵, 则 $B = A$ 。

1.2 一致性检验的改进

如果设 $\tilde{\omega}$ 是矩阵 A 的最大特征值 λ_{\max} 对应的规范化的特征向量, 由定理 1 知 $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_n)^T$ 是层次单排序的权值向量, 且有:

$$A\tilde{\omega} = \lambda_{\max}\tilde{\omega} \quad (4)$$

又矩阵 $A_{n \times n}$ 为完全一致性矩阵, 则其最大特征值 $\lambda_{\max} = n$, 若 A 不具备完全一致性, A 的最大特征值 λ_{\max} 会稍大于 n ; 所以用

$$\|A\tilde{\omega} - n\tilde{\omega}\| = \|A\tilde{\omega} - n\tilde{\omega}\| < \epsilon \quad (5)$$

作为矩阵 A 满足一致性的检验标准。

由 T. L. Saaty 教授的一致性比例 $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{\lambda_{\max} - n}{(n-1)RI} < 0.1$ 得:

$$|\lambda_{\max} - n| < 0.1(n-1)RI \quad (6)$$

$$\text{而 } \|A\tilde{\omega} - n\tilde{\omega}\| = |\lambda_{\max} - n| \cdot \|\tilde{\omega}\| \leq |\lambda_{\max} -$$

$n|$, 把(6)式代入得:

$$\epsilon = 0.1(n-1)RI \quad (7)$$

显然, 我们用

$$\|A\tilde{\omega} - n\tilde{\omega}\| < 0.1(n-1)RI \quad (8)$$

来检验矩阵的满意一致性, 可略去求解 A 的特征值, 只需计算排序向量 $\tilde{\omega}$, 简化了运算, 提高了运行速度。

1.3 矩阵的一致性检验示例

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 1/8 & 1 & 9 \\ 1/9 & 1/9 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 利用方根法求得它的}$$

$$\text{规范化的特征值向量 } \tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0.715 \\ 0.245 \\ 0.040 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \epsilon = 0.1(n -$$

$1)RI = 0.116$, 而 $\|A\tilde{\omega} - n\tilde{\omega}\| = \|A\tilde{\omega} - 3\tilde{\omega}\| = 1.161 > 0.116$, 不满足(8)式, 因此矩阵不具备满意一致性;

按(3)式修正矩阵 A , 得

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 17/3 & 30 \\ 3/17 & 1 & 51/8 \\ 1/30 & 8/51 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{其规范化的特征值向量 } \tilde{\omega}^* = \begin{bmatrix} 0.820 \\ 0.154 \\ 0.026 \end{bmatrix}, \text{ 检验式}$$

$$\|B\tilde{\omega}^* - n\tilde{\omega}^*\| = \|B\tilde{\omega}^* - 3\tilde{\omega}^*\| = 0.013 < 0.116, \text{ 因此修正后的矩阵具有满意一致性。}$$

1.4 新的改进 AHP 算法的计算步骤

第一步: 分析问题, 建立层次分析结构模型, 该模型一般含目标层、属性层和方案层;

第二步: 采用 T. L. Saaty 教授的 1~9 标度法^[1,9]构造各层的判断矩阵;

第三步: 利用方根法^[9]计算各层元素的排序权值 $\tilde{\omega}_i^j$;

第四步: 运用式(8)对判断矩阵进行一致性检验; 如果满足一致性, 转入第五步; 否则, 利用式(3)对该判断矩阵进行修正, 转入第三步;

第五步: 计算各方案的总排序权值

$$\tilde{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \tilde{\omega}_i^j \tilde{\omega}_j^{(4)}.$$

其中 $\tilde{\omega}_i^j$ 是方案 i 在属性 j 排序权值, $\tilde{\omega}_j^{(4)}$ 表示属性 j 的权重, m 表示属性的个数。

2 新的改进 AHP 算法先进性的探讨

文中创立的新的改进的层次分析算法较原 AHP 算法相比, 由于对不满足一致性判别矩阵的修正, 避免了重新调研、收集数据, 构造判断矩阵的过程, 缩短了

解决问题所需要的时间,节省了人力财力;由于对一致性判别法的改进,可以直接利用已求解出的规范化的特征向量和判断矩阵进行一致性的判断,避免了计算最大特征值的过程。

经过大量的实践证明,对于不满足一致性的判断矩阵,只需进行一次修正就可满足一致性的条件。如果进行一次修正后仍然不满足一致性,依据改进的 AHP 算法可对修正后的判断矩阵继续修正,绝大多数情况下经过有限次(20 次以下)循环,算法都可终止运行得出有效的结果。

文中新改进的 AHP 算法也适用于使用指数标度法^[10]、[0,1,2]三标度法^[11,12]等其它方法构造的判断矩阵,判断矩阵的修正、一致性的检验方法依然有效;算法的运行结果与原 AHP 算法的排序结果基本一致。

3 利用新的改进 AHP 算法确定考查课成绩评定指标的权值

通过广泛征集专家、教师、学生等各方面意见,建立了确定考查课程成绩的指标体系(见图 1)。以发放大样本容量的调查问卷的方式,采用成对比较法构造了各层次的判断矩阵。对同一指标所得到的若干个不同的判断矩阵,利用几何平均法得出该指标的综合判断矩阵(见表 1~表 4)。最后运用文中新创立的改进 AHP 算法进行各指标权重的求解,总排序权值见图 1。

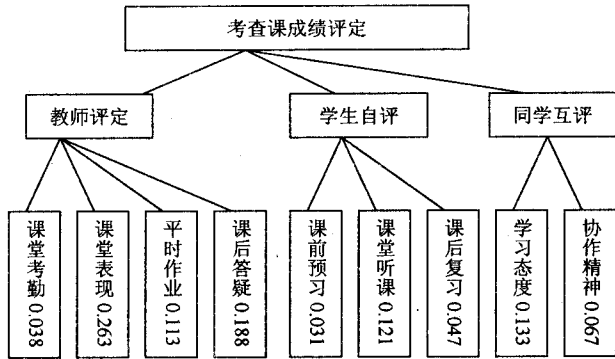


图 1 考查课成绩评定指标体系及总排序权值

表 1 方案层相对于教师评定的判断矩阵

教师评定	课堂考勤	课堂表现	平时作业	课后答疑	$\tilde{\omega}_1^T$
课堂考勤	1	0.143	0.333	0.200	0.063
课堂表现	7	1	2.333	1.400	0.438
平时作业	3	0.429	1	0.800	0.188
课后答疑	5	0.714	1.667	1	0.313

表 2 方案层相对于学生自评的判断矩阵

学生自评	课前预习	课堂听课	课后复习	$\tilde{\omega}_2^T$
课前预习	1	0.500	0.333	0.441
课堂听课	2	1	5	0.502
课后复习	3	0.200	1	0.057

表 3 方案层相对于学生互评的判断矩阵

同学互评	学习态度	协作精神	$\tilde{\omega}_3^T$
学习态度	1	2	0.667
协作精神	0.500	1	0.333

表 4 属性层相对于目标层的判断矩阵

c	教师评定	学生自评	同学互评	$\tilde{\omega}_f^T$
教师评定	1	3	3	0.600
学生自评	0.333	1	1	0.200
同学互评	0.333	1	1	0.200

其中相对属性学生自评的判断矩阵 A_2 , 层次单排序向量 $\tilde{\omega}_2 = (0.156, 0.607, 0.237)^T$, $\|A_2 \tilde{\omega}_2 - n \tilde{\omega}_2\| = 0.382 > 0.1(n-1)RI = 0.116$, 不满足一致性。经修正以后的矩阵 B_2 对应的层次单排序权值 $\tilde{\omega}_2^2 = (0.441, 0.502, 0.057)^T$, $\|B_2 \tilde{\omega}_2^2 - n \tilde{\omega}_2^2\| = 0.022 < 0.116$, 满足一致性。

从排序结果可以看出,影响学生考查课成绩的主要因素是课堂表现和课后答疑,课堂考勤、课前预习对成绩的影响依次最弱。它与原 AHP 算法得到的排序结果基本一致,但算法的运行速度要快,同时最大限度地保持了专家提供的原始数据。

4 结束语

文中在尽量尊重专家提供的原始数据基础之上,对不满足一致性的判断矩阵进行修正,改善了判断矩阵满足一致的可能性;以完全一致性矩阵的充要条件为出发点,对 T. L. Saaty 教授一致性的判别准则进行了改进;从而创立了一种新的改进 AHP 算法。该算法简单易行,由于一致性判别法的改进,避免了由判断矩阵计算最大特征值的过程,减少了运算量,提高了原 AHP 的运行速度;通过对不满足一致性判断矩阵的修正,最大限度地尊重了专家提供的原始数据,增强了排序结果和指标权值的可信度。最后将文中开创的改进 AHP 算法运用于学生考查课成绩评定指标权值的确定,以大样本容量发放调查问卷,增强了判断矩阵满足一致的可能性及排序结果适用的广泛性;新改进的 AHP 算法的使用,方便快捷地为考查课成绩的评定提供了科学的指标体系和权值。该改进算法也可应用于其它的决策问题权值的确定,它有着广阔的发展空间和应用前景。

参考文献:

[1] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York: Mc Graw - Hill, 1980: 1 - 45.
[2] Bezdek J C. Pattern recognition with fuzzy objective function

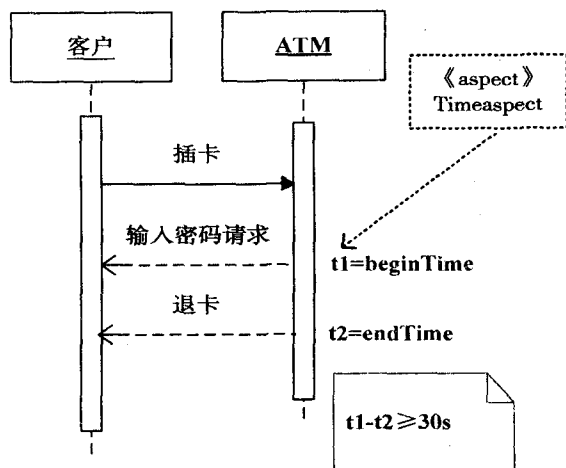


图 4 密码验证(超时)

4.3 方面织入时冲突的解决

方面织入时很容易出现关注点组合的各种冲突问题,例如系统的响应时间和系统安全性的冲突,冲突行为可以通过确定优先权的办法来解决,如果冲突的非功能需求优先权相同则可以通过与用户协商进行解决。

文献[11]给出了一种基于时序逻辑的关注点冲突解决办法,文献[12]给出了一些基于优先权矩阵的关注点冲突的解决办法,因此这里不再讨论。

5 结束语

文中基于面向方面思想讨论了实时系统关注点建模的技术,实时系统还有许多可以抽取的方面,比如异常处理、日志记录、安全检测等等都可以通过上面介绍的方法对其进行建模分析。面向方面编程现在比较成熟了,如何很好地利用这一技术为实际应用开发还是要解决的问题,在实时系统中利用这种技术进行开发还是比较少人研究,其难点还是如何解决好切面的分

离和组合的问题,这由实时系统本身的特点决定。文中的后期主要工作是横切关注点的形式化描述和验证。

参考文献:

- [1] Filman R E, Elrad T, Clarke S, et al. 面向方面的软件开发[M]. 莫倩, 王恺, 刘冬梅, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [2] IEEE Std 1471 - 2000 IEEE Recommended Practice for Architectural Description of Software - Intensive Systems Description[S]. New York: ISO, 2000.
- [3] 王海龙. What is AspectJ [EB/OL]. 中国, 2003. <http://www.ibm.com/developerworks/cn/java/1-aspectj/index.html>.
- [4] Gradecki J D, Lesiecki N. 精通 AspectJ [M]. 王欣轩, 吴东升, 等译. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [5] Aspect - Oriented Programming with AspectJ [M]. [s.l.]: I-van Kiselev, 2002.
- [6] 刘瑞成. 基于 UML 和形式化方法的面向方面实时系统模型[D]. 广州: 广东工业大学, 2006.
- [7] Jacobson I, Pan - wei NG. AOSD 中文版——基于用例的面向方面软件开发[M]. 徐锋, 译. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [8] Wagelaar D. A Concept - based approach for early aspect modeling [EB/OL]. Boston, 2003. <http://www.cs.Bilkent.edu.tr/AOSD-EarlyAspects/Papers/Wagelaar.pdf>.
- [9] 方义秋, 冉华锋, 葛君伟. 基于用例的面向方面需求建模[J]. 计算机工程, 2009, 35(12): 44 - 46.
- [10] 刘瑞成, 张立臣. 基于 UML 的面向方面建模方法[J]. 计算机科学, 2005, 32(10): 204 - 209.
- [11] 张琳琳, 应时, 倪友聪, 等. 一种软件体系结构关注点分析方法[J]. 计算机学报, 2009, 32(9): 1782 - 1791.
- [12] 郑旭飞. 一种面向方面的非功能需求框架 AONFRF 建模研究[D]. 重庆: 西南师范大学, 2005.

(上接第 117 页)

algorithms[M]. New York: Plenum Press, 1981.

- [3] 李春生, 王耀南, 陈光辉, 等. 基于层次分析法的模糊分类优选模型[J]. 控制与决策, 2009, 24(12): 1882 - 1884.
- [4] 孔峰. 模糊多属性决策理论方法及应用[M]. 北京: 中国农业科学技术出版社, 2008: 78 - 100.
- [5] 李玲娟, 豆坤. 层次分析法中判断矩阵的一致性研究[J]. 计算机技术与发展, 2009, 19(10): 24 - 26.
- [6] 王雪华. 两种层次结构化决策方法的理论与应用研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2005.
- [7] 钱刚, 冯向前, 徐泽水. 区间数互补判断矩阵的一致性[J]. 控制与决策, 2009, 24(5): 723 - 728.
- [8] 徐泽水, 吴应宇, 达庆利. 一种改进的行和归一化排序方

法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2004, 34(4): 518 - 521.

- [9] Saaty T L. Highlights and critical points in the theory and application of analytic hierarchy process[J]. European Journal of Operational Research, 1997, 74: 426 - 447.
- [10] 吕跃进. 指数标度判断矩阵的一致性检验方法[J]. 统计与决策, 2006, 24(18): 31 - 32.
- [11] 左军. 层次分析法中判断矩阵的间接给出法[J]. 系统工程, 1988, 6(6): 56 - 63.
- [12] 徐泽水. AHP 中两类标度法的关系研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 97 - 101.