

对称二值噪声下线性系统的随机共振

邱勤伟¹, 焦贤发¹, 朱良燕²

(1. 合肥工业大学 数学学院, 安徽 合肥 230009;

2. 安徽大学 数学科学学院, 安徽 合肥 230039)

摘要:对于受到外部周期力、乘性和加性的二值噪声共同作用下的线性系统,通过运用 Shapiro-Loginov 公式,计算出系统一阶矩和信噪比的表达式。信噪比作为加性噪声强度 D_2 的函数,数值结果表明在负相关区域 $-1 \leq \lambda < 0$ 条件下有随机共振现象出现,而在非负相关区域 $0 \leq \lambda \leq 1$ 却未出现;作为乘性噪声强度 D_1 的函数时,仍在负相关区域 $-1 \leq \lambda < 0$ 有共振现象发生,峰值高度随 D_2 的增大而增大,位置右移;输入信号频率 ω 和外部力振幅 α 作为信噪比的变量时,随机共振现象也被发现,峰值的位置却不随着 λ, α 的变化而变化。

关键词:值噪声;噪声强度;随机共振;信噪比

中图分类号: O211.64

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2010)08-0239-04

Stochastic Resonance in Linear System with Dichotomous Noise

QIU Qin-wei¹, JIAO Xian-fa¹, ZHU Liang-yan²

(1. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. Department of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: An exact expression of the first moment and the signal-to-noise ratio (SNR) has been calculated for a linear system subject to an external periodic field as well as the additive and multiplicative symmetric dichotomous noise using the Shapiro-Loginov formula. The SNR as a function of the additive noise intensity D_2 , numerical result shows that the stochastic resonance (SR) occurs when the noise correlation coefficient in the negative $-1 \leq \lambda < 0$, however, in the nonnegative correlation region $0 \leq \lambda \leq 1$, no SR exists; When the SNR as a function of the multiplicative noise intensity D_1 , in the negative correlation region $-1 \leq \lambda < 0$, SR appears, the peak height increases as the value of D_2 , and the peak position moves to right; Furthermore, analyze the effect of the frequency ω of the input signal, the amplitude α of an external field on the SNR, and derive the condition under which the SR occurs, and the peak position does not change with λ and α .

Key words: dichotomous noise; noise intensity; stochastic resonance; signal-to-noise ratio

0 引言

随机共振 (Stochastic Resonance, 简记为 SR) 现象的研究近些年有了新的发展^[1,2]。早期的研究中,系统的非线性是随机共振存在的三个必要条件之一,在一个由随机力和周期驱动力共同作用下的非线性动力系统中发现了随机共振^[3]。A V Barzykin 和 K. Seki 研究在有色高斯乘性噪声下的线性系统,发现了随机共振现象^[4]。V. Bezak 和 J. Czech 在泊松乘性噪声作用下的线性系统中也得到随机共振现象^[5]。最近,在调制

信号噪声作用下的线性系统中发现了随机共振,而在加性高斯白噪声作用下的线性系统中却没有发现随机共振现象^[6];在乘性噪声作用下的线性系统中,如乘性的有色噪声,特别是在短相关时间下的有色噪声中发现随机共振^[7],以及相继研究表明随机共振在以下乘性噪声中也出现:介于二值和高斯噪声之间的合成噪声作用下的线性系统、相关噪声作用下的线性系统^[8,9],等等。这些研究表明,在乘性的有色噪声驱动下线性系统中有随机共振现象出现。

然而,需要强调的是,之前诸多文章中,更多地用输出信号振幅的非单调性描述随机共振现象,且仅仅考虑只有乘性噪声,而忽略加性噪声^[8,10]。也有研究在加性和乘性噪声共同作用下线性系统的随机共振现象,选取的噪声是常见的高斯噪声^[11]。

二值噪声是随机电报噪声,是真实噪声的典型模型^[12],文中将研究系统受到乘性对称二值噪声扰动

收稿日期:2009-12-15;修回日期:2010-03-22

基金项目:教育部科学技术研究重大项目(309017);安徽省自然科学基金项目(070416231);合肥工业大学博士学位人员专项资助基金项目(GDBJ2009-007)

作者简介:邱勤伟(1984-),男,安徽宣城人,硕士研究生,研究方向为随机系统分析;焦贤发,教授,博士,研究方向为随机系统分析。

时,在加性对称二值噪声作用下线性系统的随机共振现象,运用 shapiro - loginov 公式求解系统的信噪比 (SNR),从信噪比与各噪声强度及输入信号频率、外部力振幅和噪声相关系数的关系上分析随机共振现象。

1 模型

考虑在外部周期力及二值噪声作用下的线性随机系统,系统由下面随机微分方程所描述:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -bx(t) + \xi(t)x(t) + \eta(t) + a \sin(\omega t) \quad (1)$$

这里 $\xi(t), \eta(t)$ 是对称二值噪声,分别取两个对称值 $\pm c, \pm d (c, d > 0)$, $a \sin(\omega t)$ 是外部输入信号, a 和 ω 分别是该信号的振幅和频率,并有如下均值和相关形式:

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0 \quad (2)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = D_1 \lambda_1 \exp[-\lambda_1 |t - t'|] \quad (3)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = D_2 \lambda_2 \exp[-\lambda_2 |t - t'|] \quad (4)$$

$$\langle \xi(t)\eta(t') \rangle = \lambda \sqrt{D_1 D_2} \lambda_3 \exp[-\lambda_3 |t - t'|] \quad (5)$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ 是噪声相关时间的倒数, $\lambda (-1 \leq \lambda \leq 1)$ 是噪声相关系数, D_1, D_2 分别是 $\xi(t), \eta(t)$ 的噪声强度,定义为:

$$D_1 = \frac{c^2}{\lambda_1}, D_2 = \frac{d^2}{\lambda_2} \quad (6)$$

为了计算一阶矩,把方程(1)关于 x 进行平均,运用 shapiro - loginov 公式^[13],进行相关计算得:

$$\frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + (2b + \lambda_1) \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} + [(\lambda_1 + b)b - c^2] \langle x(t) \rangle = a\omega \cos(\omega t) + a(\lambda_1 + b)\sin(\omega t) + \lambda \sqrt{D_1 D_2} \lambda_3 \quad (7)$$

方程(7)的解为:

$$\langle x(t) \rangle = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\sigma}{f_1} \quad (8)$$

$$\text{这里, } A = \sqrt{\frac{f_2^2 + f_3^2}{f_4^2}}, \varphi = \arctan(-\frac{f_3}{f_2}) \quad (9)$$

$$f_1 = \lambda_1 b + b^2 - c^2$$

$$f_2 = a[b^3 + 2\lambda_1 b^2 + (\lambda_1^2 + \omega^2 - c^2)b - \lambda_1 c^2]$$

$$f_3 = a\omega(\lambda_1^2 + 2\lambda_1 b^2 + b^2 + \omega^2 + c^2)$$

$$f_4 = b^4 + 2\lambda_1 b^3 + (\lambda_1^2 + 2\omega^2 - 2c^2)b^2 + 2\lambda_1 b(\omega^2 - c^2) + \lambda_1^2 \omega^2 + (\omega^2 + c^2)^2$$

$$\sigma = \lambda \sqrt{D_1 D_2} \lambda_3 \quad (10)$$

2 相关函数和信噪比(SNR)

一般来说,信噪比(SNR)可以用来描述系统的随

机共振(SR)现象,因此必须计算出 SNR,但首先须获得系统的自相关函数。把方程(1)两边同乘以 $x(t')$, 关于 x 平均,运用 shapiro - loginov 公式,进行计算得到:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \langle x(t)x(t') \rangle}{dt^2} + (2b + \lambda_1) \frac{d \langle x(t)x(t') \rangle}{dt} + [(\lambda_1 + b)b - c^2] \langle x(t)x(t') \rangle = \\ a \sin(\omega t) \exp(-\lambda_1 |t - t'|) + (\lambda_1 + b - \lambda_2) \exp(-\lambda_2 |t - t'|) + \exp(-\sigma |t - t'|) + [a\omega \cos(\omega t) + a(\lambda_1 + b)\sin(\omega t)] \langle x(t') \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

方程(11)的解为:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t') \rangle = \frac{256}{M} [W_1 W_2 W_3 \sin(\omega t + \varphi_1) \exp(-\lambda_1 |t - t'|) + \frac{1}{a} W_1 W_3 W_4 (\lambda_1 + b - \lambda_2) \exp(-\lambda_2 |t - t'|) + \langle x(t') \rangle W_2 W_3 W_4 \sin(\omega t + \varphi_2)] \end{aligned} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned} M = (2b + \lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 + 4c^2} - 2\lambda_2)(2b^2 - 2\lambda_1 b - 2b\sqrt{\lambda_1^2 + 4c^2} + \lambda_1^2 + \lambda_1\sqrt{\lambda_1^2 + 4c^2} + 2c^2 + 2\omega^2) \\ (2b^2 + 2\lambda_1 b - 2b\sqrt{\lambda_1^2 + 4c^2} + \lambda_1^2 - \lambda_1\sqrt{\lambda_1^2 + 4c^2} + 2c^2 + 2\omega^2)(2b^2 - 2\lambda_1 b + 2b\sqrt{\lambda_1^2 + 4c^2} + \lambda_1^2 \\ - \lambda_1\sqrt{\lambda_1^2 + 4c^2} + 2c^2 + 2\omega^2)(2b^2 + 2\lambda_1 b + 2b\sqrt{\lambda_1^2 + 4c^2} + \lambda_1^2) \end{aligned}$$

$$W_1 = b^4 + 2\lambda_1 b^3 + (\lambda_1^2 + 2\omega^2 - 2c^2)b^2$$

$$+ 2\lambda_1 b(\omega^2 - c^2) + \omega^4 + (\lambda_1^2 + 2c^2)\omega^2 + c^4$$

$$W_2 = b^2 + (\lambda_1 - 2\lambda_2)b - c^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2$$

$$W_3 = b^2 + (\lambda_1 - 2\sigma)b - c^2 - \sigma \lambda_1 + \sigma^2$$

$$W_4 = b^4 - 2\lambda_1 b^3 + (\lambda_1^2 + 2\omega^2 - 2c^2)b^2 + 2\lambda_1 b(c^2 - \omega^2) + \omega^4 + (\lambda_1^2 + 2c^2)\omega^2 + c^4 \quad (13)$$

$$\varphi_1 = \arctan[\frac{2\omega(b - \frac{1}{2}\lambda_1)}{\omega^2 + c^2 + \lambda_1 b - b^2}]$$

$$\varphi_2 = \arctan[\frac{\omega(2\lambda_1 b + \lambda_1^2 + \omega^2 + c^2 + b^2)}{\lambda_1 c^2 + (c^2 - \lambda^2 - \omega^2)b - 2\lambda_1 b^2 - b^3}] \quad (14)$$

在方程(12)中,令 $t' = t + \tau, |\tau| > 0$,将自相关函数 $\langle x(t)x(t') \rangle$ 关于 t 在一个周期 $\frac{\omega}{2\pi}$ 上平均,并进行 Fourier 变换,首先获得的是单边平均功率谱:

$$\begin{aligned} \langle S(\Omega) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \rangle e^{-i\Omega\tau} d\tau \\ = \frac{256}{M} W_1 W_4 [\frac{W_3}{a} (\lambda_1 + b - \lambda_2) \frac{2\lambda_2}{\lambda_2^2 + \Omega^2} + W_2 \frac{2\sigma}{\sigma^2 + \Omega^2}] \end{aligned}$$

$$-\frac{128}{M}W_2W_3W_4\sin(\varphi-\varphi_2)\delta(\Omega)+\frac{256\pi}{M}W_2W_3W_4\cos(\varphi-\varphi_2)[\delta(\Omega-\omega)+\delta(\Omega+\omega)] \quad (15)$$

类似可求解 $\langle S(-\Omega) \rangle_t$, 因此, 整个功率谱 $S(\Omega)$ 为:

$$S(\Omega) = \langle S(\Omega) \rangle_t + \langle S(-\Omega) \rangle_t \\ = M_1\delta(\Omega-\omega) + M_2\delta(\Omega) + M_3 \quad (16)$$

其中,

$$M_1 = \frac{256\pi}{M}W_2W_3W_4\cos(\varphi-\varphi_2) \\ M_2 = -\frac{256}{M}W_2W_3W_4\sin(\varphi-\varphi_2) \\ M_3 = \frac{512}{M}W_1W_4\left[\frac{W_3}{a}(\lambda_1+b-\lambda_2)\frac{2\lambda_2}{\lambda_2^2+\omega^2} + W_2\frac{2\sigma}{\sigma^2+\omega^2}\right] \quad (17)$$

最后, 获得的信噪比(SNR)为:

$$\text{SNR} = \frac{M_1}{M_3(\Omega=\omega)} \\ = \frac{\pi W_2W_3\cos(\varphi-\varphi_2)}{4W_1\left[\frac{W_3}{a}(\lambda_1+b-\lambda_2)\frac{2\lambda_2}{\lambda_2^2+\omega^2} + W_2\frac{2\sigma}{\sigma^2+\omega^2}\right]} \quad (18)$$

3 数值结果与结论

图1、图2描述信噪比SNR与加性噪声强度 D_2 的关系。图1中, 其它参数值为 $a=1.2, b=c=1, \lambda_1=\lambda_3=0.25, \omega=0.5$ 。该图表明在非负相关区域($0 \leq \lambda \leq 1$), 没有随机共振现象出现, SNR随着强度 D_2 的增大而减小; 在负相关区域($-1 \leq \lambda < 0$) 却有共振现象出现, 它的变化特征如图中所示。在图1中, 可以看出曲线的峰值高度随着噪声相关系数的增大而减小, 最高点的位置也左移。图2显示峰值高度随着 D_1 的增大而增大, 最高点的位置右移, 这里考虑的 λ 为负值, 经过进一步数值作图, 发现在非负相关区域($0 \leq \lambda \leq 1$) 信噪比SNR关于加性噪声强度 D_2 的函数曲线没有峰值, 即没有随机共振现象出现, 这里其它参数值为: $a=1.2, b=c=1, \lambda=-0.9, \lambda_3=0.25, \omega=0.05$ 。

图3描述信噪比SNR与乘性噪声强度 D_1 的关系, 其它参数值为 $a=1.2, b=c=1, \lambda=-0.9, \lambda_3=0.25, \omega=0.5$ 。图3曲线中, 当把加性噪声强度 D_2 作为SNR的参数时, 曲线的峰值高度会随着 D_2 的增大而增大, 而且位置右移。当取不同的相关系数时, 仍有结论: 在正相关区域($0 \leq \lambda \leq 1$) 没有共振现象出现, SNR随着 D_2 的增大而减小; 然而在负相关区域($-1 \leq \lambda < 0$) 却有共振现象出现, 并且峰值高度随着 D_2 的增大而减小, 位置左移。

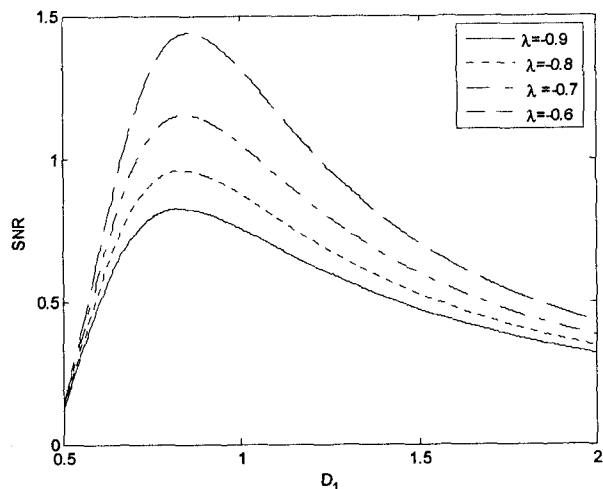


图1 SNR对不同的参数 λ , 关于加性噪声强度 D_1 的图像

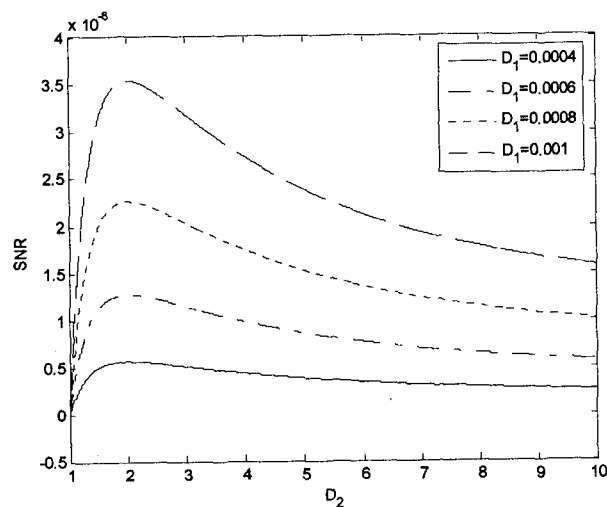


图2 SNR对不同的参数 D_1 关于加性噪声强度 D_2 的函数

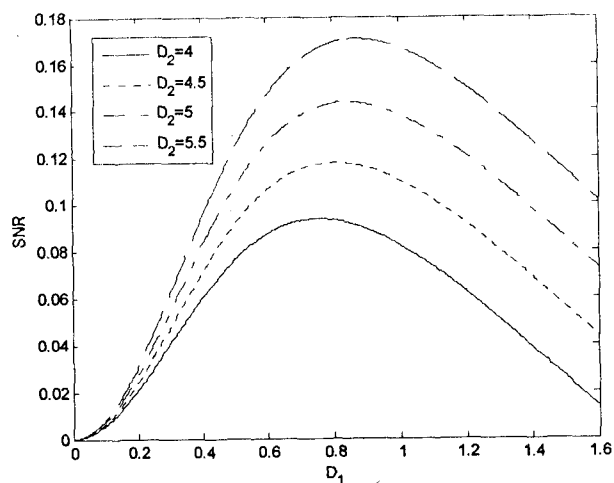


图3 SNR是对不同的参数 D_2 , 关于乘性噪声强度 D_1 的函数
比较图2和图3, 它们的SNR峰值高度变化特征

基本类似,同时,在图 3 中, $D_1 = 0$ 时有 $SNR = 0$,但在图 2 中, $D_2 = 0$ 时显然有 $SNR \neq 0$,这就要求模型中乘性噪声是不可或缺的,即仅仅在加性对称二值噪声作用下的线性系统是没有共振现象出现的。

图 4 是描述信噪比 SNR 与信号频率 ω 在不同的相关系数 λ 的条件下的关系,参数值为 $a = 1.2, b = c = 1, D_1 = 0.1, D_2 = 4, \lambda_3 = 0.25$ 。 $SNR - \omega$ 曲线的峰值出现在 λ 的整个区域,这个峰值高度也随着 λ 的减小而升高,但峰值的位置却不随着 λ 的变化而变化。

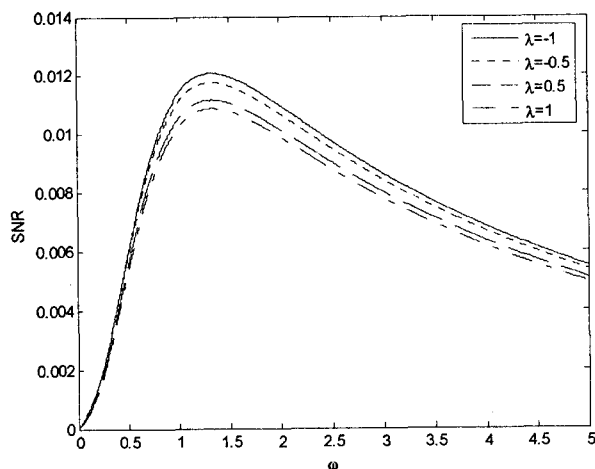


图 4 SNR 是对不同的参数 λ , 关于信号频率 ω 的图像

图 5 同样是描述信噪比 SNR 与信号频率 ω 之间关系的图像,但是在不同的外部力振幅 a 条件下,如图 5 所示,峰值高度随 a 的增大而升高,但位置却不随 a 的变化而变化,其它参数值为 $b = c = 1, \lambda = -0.9, D_1 = 0.1, D_2 = 4, \lambda_3 = 0.25$ 。

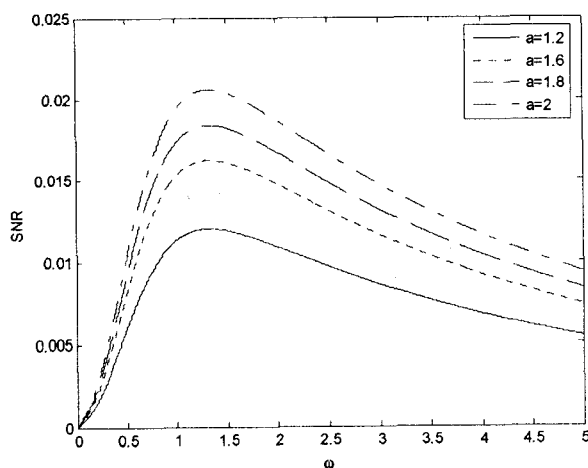


图 5 SNR 是对不同的参数 a , 关于信号频率 ω 的图像

由以上分析,在图 1、2、3 曲线中,共振峰值存在于负相关区域,这是噪声相关的结果。但必须强调的是,在图 2 曲线中,随机共振现象是在参数 D_1 、 ω 取很小

的值条件下出现的。同时,在图 4 曲线中,共振峰值存在于整个相关区域,并且峰值的位置没有变化。在图 5 中,对于不同的外部力振幅 a 也存在共振峰值,位置也未变化。从以上几幅图中可以看到,线性系统的响应不仅可以通过改变噪声强度 D_1 (或 D_2) 来获得最优值,也可以通过改变相关系数 λ 和外部力振幅 a 来获得最优值。早期研究表明,随机共振现象是指在噪声和周期信号共同驱动下,非线性系统产生的一种协同效应,而一个被加性噪声驱动的线性系统是不会出现随机共振现象的,这就是在一个线性系统中乘性噪声引起随机共振的重要性,但在乘性和加性噪声同时存在的条件下,它们之间的相关性也至关重要。

参考文献:

- [1] Calisto H, Mora F, Tirapegui E. Stochastic resonance in a linear system: an exact solution[J]. Phys. Rev. E, 2006, 74: 1 - 4.
- [2] Kim C, Lee E K. Numerical method for solving stochastic differential equations with dichotomous noise[J]. Phys. Rev. E, 2006, 73: 1 - 11.
- [3] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, et al. Stochastic resonance[J]. Rev. Mod. Phys, 1998, 70: 223 - 287.
- [4] Barzykin A V, Seki K. Stochastic resonance driven by Gaussian multiplicative noise[J]. Europhys. Lett., 1997, 40: 117 - 121.
- [5] Bezak V, Czech J. An exactly solvable linear model giving indication of stochastic resonance[J]. Phys., 1998, 48: 529 - 535.
- [6] Cao L, Wu D J. Stochastic resonance in a linear system with signal-modulated noise[J]. Europhys. Lett., 2003, 61: 593 - 598.
- [7] Bardichevsky V, Gitterman M. Multiplicative stochastic resonance in linear system: analytical solution [J]. Europhys. Lett., 1996, 36: 161 - 166.
- [8] Barzykin A V, Seki K, Shibata F. Periodically driven linear system with multicatipive colored noise[J]. Phys. Rev. E, 1998, 57: 6555 - 6563.
- [9] Marujama K, Shibata F. From two-state jump to Gaussian stochastic processes[J]. Physica A, 1988, 149: 447 - 471.
- [10] Li J H, Han Y X. Phenomenon of stochastic resonance caused by multiplicative asymmetric divhotomous noise [J]. Phys. Rev. E, 2006, 74: 1 - 9.
- [11] Bardichevsky V, Gitterman M. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise[J]. Phys. Rev. E, 1999, 60: 1494 - 1499.
- [12] Fulinski A. Non-markovian dichotomic noises[J]. Acta Physica Polonica B, 1995, 26: 1131 - 1157.
- [13] Shapiro V E, Loginov V M. Formulae for differentiation and their use for solving stochastic equations[J]. Physica A, 1978, 91: 563 - 574.