

基于互信息的多阈值系统中随机谐振现象研究

王友国, 刘洪伟, 罗 辑

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210046)

摘 要:基于互信息讨论了四种典型噪声下多阈值系统中的随机谐振现象。当输入信号在阈上时,互信息随着噪声的增强而单调递减,噪声总是恶化系统的性能;而当输入信号在阈下时,互信息随着噪声的增强先递增然后再递减,适量噪声能改善多阈值系统的性能,随机谐振现象存在。随着阈值系统阈值的增大,随机谐振功效降低,最佳噪声强度逐渐增大。文中结果说明了多阈值系统中基于互信息的随机谐振现象存在,且随机谐振对噪声具有一定的鲁棒性,拓宽了随机谐振在多元信号与信息处理中的应用。

关键词:多阈值系统;随机谐振;互信息

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2010)06-0089-04

Stochastic Resonance in Multi-Threshold Systems Based on Mutual Information

WANG You-guo, LIU Hong-wei, LUO Ji

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210046, China)

Abstract: Based on mutual information, a study is made on stochastic resonance of the multi-dimensional signal in multi-threshold systems, under four representative noises. When the input signal is supra-threshold, mutual information monotonically decrease as the noise intensity increases, the performance of multi-threshold systems is always deteriorated by noise. However, when the input signal is sub-threshold, mutual information first increase and then decline as the noise intensity increases, appropriate amount of noise can improve the performance, resulting in stochastic resonance. The efficacy of SR decreases and the optimal noise becomes large as the threshold increases. These results indicate that stochastic resonance may exist in multi-threshold systems and are of certain robustness for noises. The application of stochastic resonance will be extended in multi-dimensional signal and information processing.

Key words: multi-threshold system; stochastic resonance; mutual information

0 引言

一直以来,噪声都被认为是消极的、有害的,它经常与有用信号共存,给通信系统中的信号传输或测量系统中的信号检测等带来很大的麻烦,所以人们一直致力于降噪、除噪。近二十年来人们逐步发现噪声并不总是有害的,在特定的非线性条件下,噪声有时也能改善系统的性能,产生随机谐振现象(SR, Stochastic Resonance)。SR的概念最初是由意大利物理学家 R. Benzi 等人在解释地球远古气象中出现的冰期与暖期周期交替现象时提出的^[1,2],它描述了在一个非线性系统中,随着噪声强度的增加,可能因噪声、信号和系

统之间的某种协同作用,系统的性能得到改善的现象。

在信号与信息处理方面,国内外众多学者往往基于单阈值非线性系统或者并行网络利用不同测度(信噪比、相关系数、互信息、误码率、费歇尔信息等)研究 SR 现象的存在和可能的应用,获得了一些较好的成果^[3~13]。多阈值系统中关于多元信号的 SR 现象仅在文献[14]中讨论过。文中在四种典型噪声下,基于互信息研究多阈值系统中可能存在的 SR 现象,拓宽随机谐振在多元信号与信息处理中的应用。

1 多阈值系统和互信息

1.1 多阈值系统

设 x 是一随机信号,其可能的取值为 $\{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, x 取每个值的先验概率为 p_i ($-n \leq i \leq n, i \in \mathbb{Z}$), η 是密度函数为 $f_\eta(z)$ 和分布函数为 $F_\eta(z)$ 的平稳白噪声, x 与 η 相互独立。噪声

收稿日期:2009-09-25;修回日期:2009-12-01

基金项目:江苏省自然科学基金(08KJB510012);江苏省青蓝工程项目(TJ207010)

作者简介:王友国(1968-),男,江苏淮安人,教授,硕士生导师,研究方向为信号与信息处理,应用数学。

信号 $(x + \eta)$ 经过多阈值系统^[14] 的输出:

$$y = \begin{cases} -n & x + \eta < (-n + 0.5)u \\ j & (j - 0.5)u < x + \eta < (j + 0.5)u \\ n & x + \eta > (n - 0.5)u \end{cases} \quad (1)$$

$j \in [-n + 1, n - 1]$ 且 $j \in Z$

图 1 ($n = 1$) 显示在没有噪声的情况下, 当输入信号 $x = A \cos(2\pi Nf)$ 的幅值 $A (= 1)$ 小于 $0.5u$ ($u = 2.4$) 时, 系统输出 y (输出信号 1) 中几乎不含有输入信号的信息; 而当输入余弦信号的幅值 $A (= 1)$ 大于 $0.5u$ ($u = 1.8$) 时, 系统输出 y (输出信号 2) 明显含有输入信号的周期信息。研究多阈值系统, $0.5u$ 等效于系统的阈值。

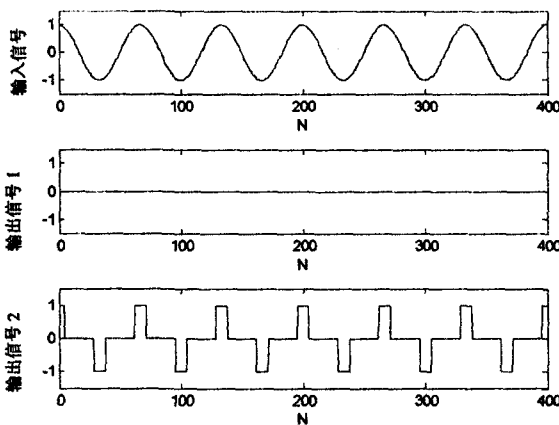


图 1 无噪声时系统的输入和输出

对任一确定 x ($-n \leq x \leq n, x \in Z$), 系统的转移概率

$$\begin{aligned} p(y = n/x) &= p(x + \eta > (n - 0.5)u) = p(\eta > (n - 0.5)u - x) = 1 - F_\eta((n - 0.5)u - x) \quad (2) \\ p(y = -n/x) &= p(x + \eta < (-n + 0.5)u) = p(\eta < (-n + 0.5)u - x) = F_\eta((-n + 0.5)u - x) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(y = j/x) &= p((j - 0.5)u < x + \eta < (j + 0.5)u) \\ &= p((j - 0.5)u - x < \eta < (j + 0.5)u - x) = F_\eta((j + 0.5)u - x) - F_\eta((j - 0.5)u - x) \quad (4) \end{aligned}$$

$-n + 1 \leq j \leq n - 1, j \in Z$

由全概率公式, 得系统的输出概率

$$\begin{aligned} p(y = j) &= \sum_{i=-n}^n p_i * p(y = j/x = i) = \\ &\begin{cases} \sum_{i=-n}^n p_i * F_\eta((-n + 0.5)u - i) & j = -n \\ \sum_{i=-n}^n p_i * \{F_\eta((j + 0.5)u - i) - F_\eta((j - 0.5)u - i)\} & -n + 1 \leq j \leq n - 1 \\ \sum_{i=-n}^n p_i * \{1 - F_\eta((n - 0.5)u - i)\} & j = n \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$

1.2 互信息

$$I = H(y) - H(y/x) \quad (6)$$

其中: $H(y) = - \sum_{j=-n}^n p(y = j) * \log_2(p(y = j))$

$$H(y/x) = - \sum_{i=-n}^n p_i \sum_{j=-n}^n p(y = j/x = i) \log_2(p(y = j/x = i))$$

这里 $H(y)$ 是信息熵, $H(y/x)$ 是条件熵。

互信息 I 反映从输出信号 y 所能获得的关于输入信号 x 的信息量。

2 四种典型噪声

2.1 均匀噪声 (具有有限均值和方差)

具有零均值和标准方差 σ 的均匀噪声密度函数为

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{12}\sigma} & -\sqrt{3}\sigma < z < \sqrt{3}\sigma \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

对应的分布函数为

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz = \begin{cases} 0 & z < -\sqrt{3}\sigma \\ \frac{z + \sqrt{3}\sigma}{2\sqrt{3}\sigma} & -\sqrt{3}\sigma \leq z < \sqrt{3}\sigma \\ 1 & z \geq \sqrt{3}\sigma \end{cases}$$

2.2 高斯噪声 (具有有限均值和方差)

具有零均值和标准方差 σ 的高斯噪声密度函数为

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \quad -\infty < z < \infty$$

对应的分布函数为

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz = 0.5 + 0.5 \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad -\infty < z < \infty$$

2.3 拉普拉斯噪声 (具有有限均值和方差)

具有零均值和标准方差 σ 的拉普拉斯噪声密度函数为

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\left|\frac{\sqrt{2}z}{\sigma}\right|\right) \quad -\infty < z < \infty$$

对应的分布函数为

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\sqrt{2}z}{\sigma}\right) & z < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}z}{\sigma}\right) & z > 0 \end{cases}$$

2.4 柯西噪声 (脉冲噪声, 无有限均值和方差)

具有零位置和标准离差 σ 的柯西噪声密度为

$$f(z) = \frac{\sigma}{\pi(z^2 + \sigma^2)} \quad -\infty < z < \infty$$

对应的分布函数为

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{z}{\sigma}\right) \quad -\infty$$

$< z < \infty$

从均匀噪声、高斯噪声、拉普拉斯噪声到柯西噪声,它们的密度函数的拖尾从无逐渐变厚,噪声取较大值的概率逐渐变大^[10]。

3 噪声改善系统性能的 SR 现象

为了简单,文中取 $n = 1$, x 等可能的取值,即 $p_i = \frac{1}{3} (-1 \leq i \leq 1)$,此时把式(2), (3), (4), (5)代入(6),得互信息

$$I = \frac{2}{3} (3 - F_\gamma(u-1) - F_\gamma(u+1) - F_\gamma(u)) * \log_2 \left\{ \frac{1}{3} (3 - F_\gamma(u-1) - F_\gamma(u+1) - F_\gamma(u)) \right\} + \frac{1}{3} (2F_\gamma(u-1) + 2F_\gamma(u+1) + 2F_\gamma(u) - 3) \log_2 \left\{ \frac{1}{3} (2F_\gamma(u-1) + 2F_\gamma(u+1) + 2F_\gamma(u) - 3) \right\} + \frac{2}{3} \{ (1 - F_\gamma(u-1)) \log_2 (1 - F_\gamma(u-1)) + (1 - F_\gamma(u+1)) \log_2 (1 - F_\gamma(u+1)) + (F_\gamma(u-1) + F_\gamma(u+1) - 1) \log_2 (F_\gamma(u-1) + F_\gamma(u+1) - 1) \} + \frac{1}{3} \{ 2(1 - F_\gamma(u)) \log_2 (1 - F_\gamma(u)) + (2F_\gamma(u) - 1) \log_2 (2F_\gamma(u) - 1) \} \quad (7)$$

在四种典型噪声下,图2、图3给出了多阈值系统的互信息 I 随噪声强度(标准方差 σ) 的变化情况,其中实线是根据式(7)得到的理论结果,离散数据点为

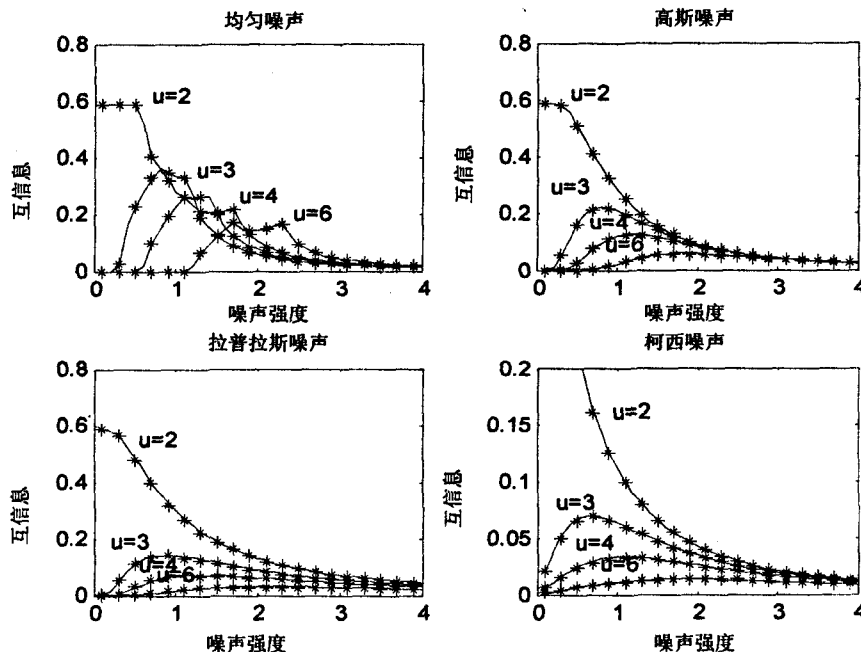


图2 随噪声强度变化的互信息

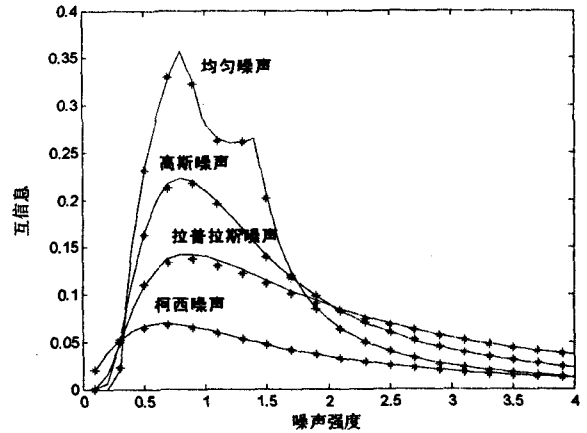


图3 $u = 3$ 时,互信息 I 随不同分布的噪声强度的变化

计算机仿真结果。

图2说明当输入信号在阈上时($u \leq 2$),多阈值系统的互信息 I 都随着噪声强度的增加而单调递减,从输出信号 y 中能获得的关于输入信号 x 的信息量越来越少,系统的性能随噪声的加入而恶化。然而,当输入信号在阈下($u > 2$),互信息 I 随噪声强度的增加先是从0开始单调递增,达到一个最大值(此处的噪声强度达到最佳 σ_{opt}),然后再单调递减,系统产生 SR 现象。在噪声强度为0时,阈下信号没有噪声帮助不能穿过阈值,互信息 I 的值为0,从输出信号不能获得关于输入信号的信息;当噪声强度从0开始逐渐增加时,阈下信号在噪声的帮助下越来越容易穿过阈值,互信息 I 单调递增,从输出端所能获得的关于输入信号 x 的信息量逐渐增大,适量的噪声改善了系统的性能;随着噪声

强度的进一步增强,互信息 I 又开始单调递减,从输出信号所能获得的关于输入信号的信息量越来越少,这可能是过强的噪声诱导了线性化,噪声破坏系统性能的性质得到了恢复^[15]。随着阈值的增加,图2显示随机谐振功效降低、最佳噪声值(此时互信息 I 最大)变大,这是因为随着阈值的增加,阈下信号相对于阈值显得更弱,噪声帮助信号穿过阈值变得困难,需要更强的噪声才行。

在相同阈值时,图3说明不同噪声分布下互信息 I 随噪声强度增加所能达到的最大值是不同的,即 SR 的功效是不同的,均匀噪声下功效最大,柯西噪声下功效最小。这是因为从均匀噪声、高斯噪

声、拉普拉斯噪声到柯西噪声,它们的密度函数的拖尾从无逐渐变厚,噪声取较大值的概率逐渐变大^[10],适量噪声改善多元信号和信息处理的能力被中和。

4 结束语

基于互信息研究了四种典型噪声下多阈值系统中的 SR 现象。通过理论计算和计算机仿真得到:多阈值系统中,当输入信号在阈上时,噪声总是恶化系统的性能;当信号在阈下时,适量的噪声能够改善系统的性能,即 SR 现象存在。随着阈值系统阈值的增大,随机谐振功效降低,最佳噪声强度逐渐增大。相同阈值时,四种典型噪声作用下的互信息随噪声强度的增加所能达到的最大值不同,也即 SR 的功效不同,均匀噪声下 SR 的功效最好,柯西噪声下 SR 的功效最差。

基于相关系数讨论多阈值系统中的随机谐振也能得到类似的结论。这些结果说明了多阈值系统中 SR 现象可能存在,且对噪声具有一定的鲁棒性,拓展了 SR 在多元信号与信息处理中的应用。

参考文献:

- [1] Benzi R, Parisi G, Stuer A. A theory of stochastic resonance in climatic change[J]. SIAM Journal on applied mathematics, 1983,43(3):565-578.
- [2] Benzi R, Stuer A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance[J]. J Phys A, 1981,14(5):453-457.
- [3] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, et al. Stochastic resonance[J]. Rev Mod Phys, 1998,70(1):223-287.
- [4] 王友国, 吴乐南. 极大阈值网络中的噪声提高 Fisher 信息[J]. 南京邮电大学学报:自然科学版, 2007,27(2):68-

71.

- [5] 王友国, 吴乐南. 离散时间系统中的噪声辅助信号传输[J]. 电子学报, 2009,37(10):231-234.
- [6] 张雷, 宋爱国. 随机共振在信号处理中应用研究的回顾与展望[J]. 电子学报, 2009,37(4):811-818.
- [7] Greenwood P E, Ward L M, Wefelmeyer W. Statistical analysis of stochastic resonance in a simple setting[J]. Physical Review E, 1999,60(4):4687-4695.
- [8] Chapeau-Blondeau F, Rousseau D. Noise improvements in stochastic resonance from signal amplification to optimal detection[J]. Fluctuation and Noise Letters, 2002,2(3):221-233.
- [9] Chapeau-Blondeau F. Stochastic resonance and the benefit of noise in nonlinear systems[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000:137-155.
- [10] Wang Youguo, Wu Lenan. Stochastic Resonance in Nonlinear Signal Detection[J]. International Journal of Signal Processing, 2006,2(2):108-113.
- [11] 王友国, 吴乐南. 极大并联储值网络中噪声改善信号的相关性[J]. 数据采集与处理, 2006,21(4):409-412.
- [12] 王友国. 广义高斯噪声下阈值系统中的随机谐振[J]. 南京邮电大学学报:自然科学版, 2006,26(6):40-42.
- [13] Wang Youguo, Wu Lenan. Stochastic resonance based on correlation coefficient in parallel array of threshold devices[J]. Journal of Southeast University(English Edition), 2006,22(4):479-483.
- [14] Gammaitoni L. Stochastic resonance in multi-threshold systems[J]. Physics Letters A, 1995,208:315-322.
- [15] Wang Youguo, Wu Lenan. Stochastic resonance and noise-enhanced Fisher information[J]. Fluctuation and Noise Letters, 2005,5(3):435-442.

(上接第 88 页)

mental results analysis, the improved Apriori algorithm significantly improve the efficiency of the algorithm.

References:

- [1] 郭有强. 一种高效的关联规则维护算法研究与实现[J]. 计算机技术与发展, 2007,17(10):123-126.
- [2] 袁万莲, 郑诚, 翟明清. 一种改进的 Apriori 算法[J]. 计算机技术与发展, 2008,18(5):51-53.
- [3] 钱雪忠, 孔芳. 关联规则挖掘中对 Apriori 算法的研究[J]. 计算机工程与应用, 2008,44(17):138-140.
- [4] 段仰广, 韦玉科. 基于循环十字链表的频繁模式挖掘算法[J]. 计算机技术与发展, 2009,19(10):73-77.
- [5] 司开君, 毛宇光. 一种新的基于数据流的数据模型[J]. 计算机技术与发展, 2006,16(1):1-3.
- [6] Han J, Pei J. Mining frequent patterns by pattern growth: Methodology and implications[J]. J. SIGKDD Explorations

(Special Issue on Scalable Data Mining Algorithms), 2000 (2):142-152.

- [7] Han J W, Kamber M. Data Mining: Concepts and Techniques [M]. 2nd ed. Beijing: China Machine Press, 2007:147-155.
- [8] Agrawal R, Srikant R. Fast algorithms for mining association rules[C]//In Proc. VLDB'94. [s.l.]:[s.n.], 1994.
- [9] Brin S, Motwani R, Ullman J D, et al. Dynamic itemset counting and implication rules for market basket data[C]//In Proc. ACM SIGMOD'97. [s.l.]:[s.n.], 1997:235-241.
- [10] Cai W J, Zhang X H. Survey of Association Rule Generation [J]. Computer Engineering, 2001(5):31-33.
- [11] 惠明滨, 张凤鸣. 一种基于栈变换的高效关联规则挖掘算法[J]. 计算机研究与发展, 2003,40(2):330-335.
- [12] Han J W, Pei J, Yin Y W, et al. Mining frequent patterns without candidate generation: a frequent-pattern tree approach[J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 2004,8(1):53-87.