

基于 SPH 方法的滴水涟漪动画模拟

李玉梅,汪继文

(安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室,安徽 合肥 230039)

摘 要:光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics,SPH)方法是一种新近发展的可用于流体模拟的无网格数值方法。文中基于 SPH 方法的基本原理,利用 SPH 方法求解描述水流现象的二维浅水波方程,根据具体模型使用 Monaghan 人工粘性的变形形式,有效地防止了相互靠近粒子的穿透,消除了 SPH 方法在模拟流体动力学问题时产生的数值振荡。通过使用可变光滑长度,使邻近粒子的数量保持相对稳定,提高了求解的计算效率和精度。同时,对光滑长度进行了修正以获取对称光滑长度,保持了粒子间相互作用对称性。全面考虑了各种定解条件的设置,对水滴的运动进行了模拟,SPH 模拟结果与有限差分法、有限体积法结果非常吻合,验证了方法的准确性,为 SPH 方法的进一步发展和广泛运用奠定了基础。

关键词:光滑粒子流体动力学方法;浅水波方程;光滑核函数;水波动画

中图分类号:TP391.9

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2010)05-0056-03

Simulation of Ripples Based on Smoothed Particle Hydrodynamics Method

LI Yu-mei, WANG Ji-wen

(Ministry of Education Key Lab. of Intelligent Computing & Signal Processing,
Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: Smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is a newly developed meshless numerical method which can be used for the simulation of fluid. In this paper, the SPH method is applied to solve the two-dimensional shallow water equation based on the basic principles of SPH, distortion of Monaghan artificial viscosity is introduced to prevent unphysical penetration for particles approaching each other and remove numerical oscillation in hydrodynamics simulations using SPH. One approach to dynamically evolve the smoothing length is proposed to keep the number of neighboring particles relatively constant and improve the efficiency of the computation and the accuracy of the solution. Meanwhile, in order to preserve the symmetry of particle interaction, some ways to perform the modification are used to produce a symmetric smoothing length. A variety of settings solution conditions will be fully taken into account, the movement of water droplets have been simulated, SPH simulation results is similar with the results obtained by finite difference method and finite volume method. The results verified the accuracy of the method. It laid the foundation for the further development and wider application of SPH method.

Key words: smoothed particle hydrodynamics method; shallow water equation; smoothing kernel function; water animation

0 引言

在对自然景物的模拟中,水流的动画模拟是一个有意义的课题。在文中,通过求解二维浅水波方程,对水滴的下落这一现象进行了动画模拟,对浅水波方程进行了数值求解,所使用的数值方法是 SPH 方法。

对水流场景的模拟,基于物理模型的方法已得到

了广泛的运用,文献[1]用有限差分法的隐格式求解二维的浅水波方程,通过设定初值和边界条件控制动画情节,文献[2]用基于物理模型的方法模拟了水流动画。文献[3]在用有限体积法求解方程的基础上,计算中加入了粒子系统,与以往工作不同的是粒子被进一步分成水滴、水柱、水粒和水泡。该方法还讨论了如何利用隐式曲面技术对液态物体进行造型,以偏更逼真地表现物体形状的多变性。文中利用了 SPH 方法来求解二维浅水波方程^[4],该方法也用于自由表面流体的模拟^[5]。并对滴水涟漪动画进行了模拟,能够模拟出逼真的效果。

收稿日期:2009-09-15;修回日期:2009-12-11

基金项目:安徽省自然科学基金(090412045)

作者简介:李玉梅(1986-),女,安徽亳州人,硕士研究生,研究方向为计算机模拟与仿真;汪继文,教授,博士后,博士生导师,研究方向为智能计算。

1 浅水波方程

水一般视为理想的不可压缩无粘性流体,采用简化的二维 N—S 方程,即二维浅水波方程来模拟水流现象。浅水波理论假定水的速度沿深度方向不变,在假定自由面压力分布为常数,并忽略表面风切应力、Coriolis 力和内部水平切应力时,描写二维瞬变(transient)自由面流体运动的浅水波方程的守恒形式为:

$$U_t + (E(U))_x + (G(U))_y = S(U) \quad (1)$$

其中 U 是守恒变量向量, $E(U)$ 、 $G(U)$ 是对流向流量分量。

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{bmatrix} \quad E(U) = \begin{bmatrix} Hu \\ Hu^2 + \frac{1}{2}gH^2 \\ Hu v \end{bmatrix}$$

$$G(U) = \begin{bmatrix} Hv \\ Hu v \\ Hu^2 + \frac{1}{2}gH^2 \end{bmatrix}$$

$$S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -gH(S_{0x} + S_{fx}) \\ -gH(S_{0y} + S_{fy}) \end{bmatrix}$$

二维浅水方程的守恒形式(式(1))可变为^[6]:

$$\frac{DH}{Dt} = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (\text{动量守恒方程}) \quad (2)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -g\frac{\partial H}{\partial x} - g(S_{0x} + S_{fx}) \quad (\text{连续性方程}) \quad (3)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g\frac{\partial H}{\partial y} - g(S_{0y} + S_{fy}) \quad (\text{连续性方程}) \quad (4)$$

其中 h 是水的深度, u, v 为深度平均速度分量, g 是重力加速度; s 是源项,包括底部摩擦力项和河床斜率项,文中主要考虑 $s = 0$ 。

2 浅水波方程的 SPH 形式

2.1 水流深度

对于二维矩形水道,将水道中的水在 x 方向和 y 方向上离散化为一列的粒子,每个粒子表示一个立方体形状的水柱,每个粒子具有材料属性:质量、密度、体积、水深、速度。对于粒子 j ,若 m_j 表示粒子 j 的质量, ρ_j 表示粒子 j 的密度, V_j 表示粒子 j 的体积, H_j 表示粒子 j 的水深, S_j 表示粒子 j 底面面积,则 $S_j = V_j/H_j$, $m_j = \rho_j V_j$ 。

假设已知函数 $f(x)$ 在 x 支持域内的粒子处的函数值,则 $f(x)$ 及其空间导数在 x 处的值为:

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{V_j}{H_j} f(x_j) W(x - x_j, h) \quad (5)$$

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{V_j}{H_j} f(x_j) \cdot \nabla W(x - x_j, h)$$

(6)

其中 $\nabla W(x - x_j, h) = \frac{\partial W(x - x_j, h)}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dx}$, 而 $\frac{dr}{dx} = \frac{d(|x - x_j|/h)}{dx} = \frac{x - x_j}{h|x - x_j|}$, r 是粒子间的相对距离。

所以可由下列两式得到粒子 i 处的水深 H_i 及其关于 x 的偏导数 $(\partial H/\partial x)_i$:

$$H_i = \sum_{j=1}^N V_j W(x - x_j, h) \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_i = \sum_{j=1}^N V_j \cdot \nabla_i W(x_i - x_j, h) \quad (8)$$

粒子处的速度的空间导数为

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^a}\right)_i = \sum_{j=1}^N \frac{V_j}{H_j} v_j \cdot \nabla_i W(x_i - x_j, h) \quad (9)$$

W 为核函数,常用的核函数为 SPH 方法中最为广泛应用的三次样条光滑核函数,形式为:

$$W(R, h) = \alpha^d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2}R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & 2 \leq R \end{cases}$$

对于二维问题, $\alpha^d = \frac{15}{7\pi h^2}$ R 是在点 x 和 x' 处两粒子间的相对距离, $R = r/h = |x - x'|/h$, r 是两粒子间的距离^[5]。

2.2 质量、动量守恒和连续性方程

在本小节中,列出了 SPH 法应用于浅水波方程时的守恒性质。

规定在计算过程中粒子的质量固定不变,则满足质量守恒定律。由于水是不可压流体,其密度不变,所以粒子的体积 V_j 保持不变。

若不考虑河床摩擦倾斜的影响,即源项 $S(Q)$ 为 0,则式为

$$\frac{Dv}{Dt} = -g(\nabla H) \quad (10)$$

由于位移的改变率即为速度,因此有:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i \quad (11)$$

将式(8)代入方程(10)可得:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -g \sum_{j=1}^N V_j \cdot \nabla_i W(x_i - x_j, h) \quad (12)$$

若光滑核函数 $W(x - x', h)$ 是偶函数,则有 $\nabla_i W(x_i - x_j, h) = -\nabla_j W(x_j - x_i, h)$, 在问题域中的总动量为

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{Dv_i}{Dt} = \sum_{i=1}^N \rho_i V_i \frac{Dv_i}{Dt} = -g \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_i V_i \rho_j V_j \nabla_i W = 0$$

满足动量守恒定律。

根据式(6)可得:

$$\nabla_x(H \cdot v) = \sum_{j=1}^N \frac{V_j}{H_j} H_j v_j \nabla W(x - x_j, h)$$

又因式(11),可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla_x \cdot [H(x, t) v(x, t)] \\ &= \sum_{j=1}^N V_j \nabla W(x - x_j, h) \left(-\frac{dx_j}{dt}\right) + \sum_{j=1}^N \frac{V_j}{H_j} H_j v_j \nabla W(x - x_j, h) \\ &= \sum_{j=1}^N V_j \nabla W(x - x_j, h) (-v_j) + \sum_{j=1}^N \frac{V_j}{H_j} H_j v_j \nabla W(x - x_j, h) = 0 \end{aligned}$$

这同时说明了水深 H_i 近似式(7)精确地表示的水流的连续性方程(10)。

2.3 人工粘度

为了模拟流体动力学问题,并使算法适合于模拟具有冲击波问题和防止粒子间相互接近时的非物理穿透,引入 Monaghan 型的人工粘度 Π_{ij} [6]。形式如下:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \Pi_{ij} \bar{c}_{ij} \phi_{ij} + \beta \Pi_{ij} \phi_{ij}^2}{\bar{H}_{ij}} & u_{ij} \cdot x_{ij} < 0 \\ 0 & u_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

其中, $u_{ij} = u_i - u_j$, $x_{ij} = x_i - x_j$, $\bar{c}_{ij} = 0.5(c_i + c_j)$, $\bar{H}_{ij} = 0.5(H_i + H_j)$, $\phi_{ij} = \frac{h_{ij} u_{ij} \cdot x_{ij}}{|x|^2 + (\epsilon h_{ij})^2}$, $h_{ij} = 0.5(h_i + h_j)$, $\alpha \Pi = 1$, $\beta \Pi = 1$, c_i 为粒子 i 处的浅水波速,即 $c_i = \sqrt{gH_i}$ 。

2.4 光滑长度

在 SPH 中,改变光滑长度就相应地改变了数值分辨率,现已有许多方法对光滑长度进行动态变换,并使邻近粒子的数量保持相对稳定 [7]。针对本问题,简单而有效的方法是令 $h = h_0 \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{1}{d}}$ 。

2.5 边界处理

为了解决 SPH 方法存在的边界缺陷问题,使用了 Liu 提出的虚粒子法 [8,9]。Liu 共提出了两种类型的虚粒子,类型 1 的虚粒子设置在固定边界上,当类型 1 虚粒子成为邻近边界处的实粒子的相邻粒子时,则会在沿着两粒子的中心线处对实粒子产生一个作用力:

$$f_{ij} = \begin{cases} D \left[\left(\frac{r_0}{r_{ij}}\right)^{n_1} - \left(\frac{r_0}{r_{ij}}\right)^{n_2} \right] \frac{x_{ij}}{r_{ij}^2} & \left(\frac{r_0}{r_{ij}}\right) \leq 1 \\ 0 & \left(\frac{r_0}{r_{ij}}\right) > 1 \end{cases}$$

式中:参数 n_1 和 n_2 一般取值分别为 12 和 4。一般情况下, D 取值位于速度最大值的平方相等的量级。截至半径 r_0 的取值与粒子的初始间距的大小相近。 r_{ij} 是粒子 i 和 j 粒子间的距离。

2.6 时间积分

SPH 的时间积分方法与其它显式流体力学中所用方法基本相同,一般要求选用的方法能得到高阶精度,而扫描粒子的数目最小。目前广泛采用的蛙跳格式、预测-校正法和二阶龙格-库塔积分等方法,都能达到二阶时间精度。文中采用蛙跳格式积分 [10],在第一个时间步长 (t_0) 结束后,速度的改变量被用于将速度向前推进半个时间步长,而粒子的位移则向前进一个步长。

$$\begin{cases} t = t_0 + \Delta t \\ v_i(t_0 + \Delta t/2) = v_i(t_0) + \Delta t/2 Dv_i(t_0) \\ x_i(t_0 + \Delta t) = x_i(t_0) + \Delta t \cdot v_i(t_0 + \Delta t/2) \end{cases}$$

为了在以后的每一时间步内保持计算的一致性,在以后的每一个时间步的开端,每一个粒子的速度都必须推前半个时间步长,以便能与位移保持一致。

$$v_i(t) = v_i(t_n - \Delta t/2) + \Delta t/2 \cdot Dv_i(t - \Delta t)$$

在随后时间步的末端,粒子的速度和位移就可以按标准的蛙跳法推进了。

$$\begin{cases} t = t + \Delta t \\ v_i(t + \Delta t/2) = v_i(t - \Delta t/2) + \Delta t Dv_i(t) \\ x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \Delta t \cdot v_i(t + \Delta t/2) \end{cases}$$

3 算例模拟

下面使用 SPH 法对滴水涟漪现象进行模拟,模拟的场景为 200×200 的水域,使用的实粒子数为 10000 个,在水池四周的边界上与边界外按照介绍的方法分布有第一类型和第二类型虚粒子。给定的初始条件是在每个粒子节点上 $U = (h, u, v) = (h_0, 0, 0)$ 。

为了简单起见,在实验中仅在水域的中心施加扰动,人为地制造出水滴作用处的初值,即把这个作用点上的 U 值进行扰动 $U = U + dU$,即 $h = h + dh$, $u = u + du$, $v = v + dv$ 。以 0.3 秒为一个时间步长,图 1 是利用该算法进行单水滴涟漪模拟的几帧截图。

4 结束语

利用 SPH 方法对二维浅水波方程进行了求解,并且考虑了各种条件,能够逼真地模拟出水滴落在水面的情形。在模拟滴水涟漪时,在水滴与水表面的碰撞仍然存在着震荡,抹平速度太慢。这些仍待在下一步的研究中克服。

参考文献:

- [1] Kass M, Miller G. Rapid, stable fluid dynamics for computer-

(下转第 62 页)

the One 仿真工具,对 Epidemic, Spray and Wait, Prophet, alterable utility - based 这四种路由机制进行仿真分析,最后得出,基于可变效用的路由机制在递交率和平均延迟两项指标上表现很出色,改善了递交率,大大减小了平均延迟。文中只考虑了递交次数和递交概率成线性关系时来计算下一跳待满足的概率,下一步打算以递交次数和递交概率成指数函数关系时来计算待满足的概率,来研究基于可变效用的路由机制在容迟网络里的表现。

参考文献:

- [1] Fall K. A delay - tolerant network architecture for challenged Internets[C]//Proc. ACM SIGCOMM. Karlsruhe, Germany: [s. n.],2003:27 - 34.
- [2] 郑 炜,王 澄.延迟容忍网络中的路由算法研究[J]. 信息技术,2007(7):68 - 70.
- [3] 熊永平,孙利民,牛建伟,等. 机会网络[J]. 软件学报,2009,20(1):124 - 137.
- [4] 陈 飘,卢汉成,李津生,等. 用于延时可容忍网络的增强型 MED 路由算法[J]. 计算机工程,2007,33(21):90 - 92.
- [5] Mitchener W, Vadhat A. Epidemic Routing for Partially Connected Ad hoc Networks[R]. US:Duke University,2000.
- [6] Spyropoulos T, Psounis K, Raghavendra C. Spray and Wait: An efficient routing scheme for intermittently connected mo-

bile networks[C]//Proc. ACM SIGCOMM Workshop on Delay - Tolerant Networking (WDTN) 2005. Philadelphia, USA:[s. n.], 2005:252 - 259.

- [7] Wang Y, Jain S, Martonosi M, et al. Erasure - Coding based routing for opportunistic networks[C]// In: Proc. of the 2005 ACM SIGCOMM Workshop on Delay - Tolerant Networking. Philadelphia: ACM, 2005:229 - 236.
- [8] Juang P, Oki H, Wang Y, et al. Energy - Efficient computing for wildlife tracking: Design tradeoffs and early experiences with ZebraNet[C]//In: Proc. of the 10th Int'l Conf. on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems. New York: ACM, 2002:96 - 107.
- [9] Lindgreny A, Doria A, Schel O. Probabilistic Routing in Intermittently Connected Networks[C]//Proceedings First International Workshop on Service Assurance with Partial and Intermittent Resources (SAPIR 2004). Fortaleza, Brazil: [s. n.],2004:239 - 254.
- [10] Zhao W, Ammar M, Zegura E. A message ferrying approach for data delivery in sparse mobile ad hoc networks[C]//In: Proc. of the 5th ACM Int'l Symp. on Mobile Ad Hoc Networking and Computing. Roppongi Hills: ACM,2004:187 - 198.
- [11] TKK/COMNET. Project page of the ONE simulator[EB/OL]. 2008. <http://www.netlab.tkk.fi/tutkimus/dtn/theone/>.

(上接第 58 页)

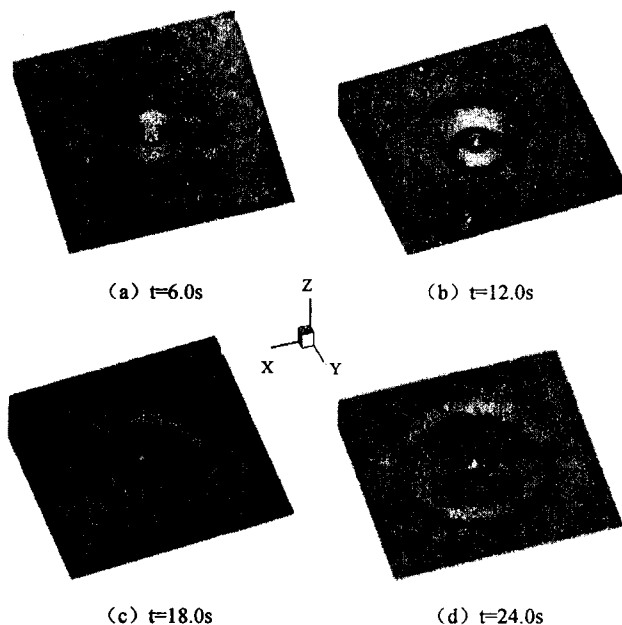


图 1 单水滴涟漪模拟的几帧截图

graphics[C]//In: SIGGRAPH' 90. Dallas, Texas, USA: ACM Press,1990:49 - 55.

模拟[J]. 计算机学报,1996,19(增刊):153 - 160.

- [3] 陈前华,邓建松,陈发来.滴水涟漪的计算机动画模拟[J]. 计算机研究与发展,2001,38(5):524 - 528.
- [4] 张妹慧,汪继文.求解浅水方程的光滑粒子流体动力学法[J].合肥工业大学学报,2007,20(7):889 - 891.
- [5] 毛益明,汤文辉.自由表面流动问题的 sph 方法模拟[J].解放军理工大学学报,2001,2(5):92 - 94.
- [6] Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003,155:263 - 284.
- [7] Monaghan J J. On the problem of penetration in particle methods[J]. Comput. Phys,1989(82):1 - 15.
- [8] Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Numerical simulation of incompressible flows by SPH[C]//International Conference on Scientific & Engineering Computing. Beijing: [s. n.],2001.
- [9] Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Investigations into water mitigations using a meshless Particle method[J]. Shock Waves, 2002,12(3):181 - 195.
- [10] 徐 立,孙锦山.一维激波管问题的 SPH 模拟[J]. 计算物理,2003,20(2):153 - 156.

[2] 徐迎庆,苏 成,李 华,等.基于物理模型的流水及波浪