

复杂网络维的测量

李方洁, 刘希玉

(山东师范大学 管理与经济学院, 山东 济南 250014)

摘 要:近几年来,科学领域内许多不同学科学者对复杂网络中的维产生了关注和研究,维在复杂网络的研究中起着越来越重要的作用,从而成为国际科学研究前沿领域内的一个新热点。介绍了关于复杂网络中的维的三种定义,例如黎曼 Zeta 函数、容量维数等,然后说明了维数的一些性质并介绍了捷径模型,最后将这些理论应用在 Ising 模型中并对未来的发展进行了展望。通过对复杂网络中的维的测量,可以更加深入地了解复杂网络并将其更好的应用。

关键词:复杂网络;维;捷径模型

中图分类号:TP31

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2010)04-0061-04

Measuring Dimensions for Complex Networks

LI Fang-jie, LIU Xi-yu

(School of Management and Economy, Shandong Normal University, Jinan 250014, China)

Abstract: Several studies in different fields have been done on the fractal dimensions of complex networks. Dimensions play more important role in complex network. As a result, it has formed a new science field. Introduce three ways to resolve the problem, such as the complex network Zeta function and volume dimension. Then show some properties of dimensions and introduce shortcut model. At last use results from the theory to Ising mode and present challenges for researchers in the foreseeable future. By measuring the dimensions of complex networks, give an insight into the complex network and apply it better.

Key words: complex network; dimension; shortcut model

0 引 言

在统计力学的研究中,系统分析中维的确定是一个很重要的问题。基于复杂网络研究的兴起,数学家主要将精力放在了网络结构复杂性及其与网络行为之间的关系。而在这篇文章里,将重点介绍复杂网络中的维,将维的定义从规则网络扩展到复杂网络,并且介绍维的性质及其应用。

网络的研究起源于著名的欧拉七桥问题,大部分致力于对简单的规则网络和随机网络进行抽象的数学研究。但是随着发展,数学家将研究领域从规则网络延伸到了复杂网络。在现实世界中,存在着许多网络,但大部分网络既不是随机网络,也不是规则网络,而是具有一定规律的复杂网络。复杂网络几乎无处不在,例如:通讯网络、社会网络、生物神经网络等。

规则网络模型有三种:全局耦合网络(globally cou-

pled network)、最近邻耦合网络(nearest-neighbor-coupled network)、星形耦合网络(star coupled network)^[1]。通过研究发现,规则网络具有许多的特性,其中包括网络维的特性。维的确定在网络研究中起着十分重要的作用。随着研究深入,已经将维的定义扩展到了复杂网络。近几年来,在复杂网络结构的统计特性方面提出了很多的概念和理论,如:网络直径、节点度分布、平均路径长度和集聚系数等,而复杂网络中的维则是一个相当重要的方面。

1 复杂网络维的定义

在规则网络中,维的表示如下:用 Z^d 来表示该网络,其中 d 是网络的维度,并且 d 必须是正整数。而对复杂网络维的研究,可以从不同的角度来进行定义,并且研究表明:有许多方法可以解决这个问题,但最好的方法应该是取决于过程的性质。

1.1 维的定义一

文献[2]中是通过节点之间的关系来定义的,主要原因为:若某个系统是由于物理过程而产生的,则可以通过节点来确定物理空间的联系,其中网络节点为系

收稿日期:2009-08-03;修回日期:2009-11-10

基金项目:山东省信息产业发展专项基金(2008R00038)

作者简介:李方洁(1986-),女,山东济宁人,硕士,从事智能计算、数据挖掘以及复杂性等研究;刘希玉,博士,教授,研究方向为计算智能、数据挖掘等。

统元素,边为元素间的相互作用。该定义基于两个前提条件^[2],具体为:第一,点 i 与点 j 之间的距离 $r(i, j)$ 定义为连接这两点的所有路径的最短路径,这是由于直接相连的两个节点的相互作用远远大于间接相连的点;第二,由于很容易确定规则离散网络的维,所以将复杂网络维的定义降低至离散网络较为明显的性质。这两个前提条件会减少考虑因素的数量。

一般情况下,维是在一定限制条件下,由一些属性的尺度指数来定义的。而在物理方面,应用最好的属性是基于距离的容积尺度(scaling of volume with distance)。相关概念如下:

(1) 尺度。

规则网络 Z^d 中,如果距离给定的点 i 的距离小于等于 $r(i, j)$ 的点 j 的数目被称为尺度 $r(i, j)^d$ 。

(2) 容积。

复杂网络中,如果距离给定点 i 的距离小于等于 $r(i, j)$ 的点 j 的数目平均除以 i 得到的数被称为复杂网络的容积(volume)。

(3) 欧几里德距离。

对于一个在 Z^d 网络的向量 $n = (n_1, \dots, n_d) \in Z^d$, 其中 n 为连接两个顶点的向量, d 是正整数。欧几里德距离定义为:

$$||n|| = \sqrt{n_1^2 + \dots + n_d^2} \quad (1)$$

(4) L^1 标准。

对于一个在 Z^d 网络的向量 $n = (n_1, \dots, n_d) \in Z^d$, 其中 n 为连接两个顶点的向量, d 是正整数。 L^1 标准定义为:

$$||n||_1 = ||n_1|| + \dots + ||n_d|| \quad (2)$$

复杂网络中,将维定义为:决定基于距离的容积尺度的指数。这个尺度指数支持欧几里德范数,也支持 L^1 标准,这个换算关系为:

$$V(r) = kr^d \quad (3)$$

对于复杂网络,公式(3)中的 d 没必要为整数且 k 是基于复杂网络的几何常数。如果在公式(3)中的换算关系支持,可以将距离给定点的长度正好为 r 的点的个数定义为表面积 $S(r)$ 。 $S(r)$ 尺度为:

$$S(r) = kdr^{d-1} \quad (4)$$

1.2 维的定义二

定义二基于一个前提,将定义降低至离散网络较为明显的性质,从而利用黎曼 Zeta 函数来定义复杂网络中的维。文献[3]中,在无限系统约束下,复杂网络的维可以定义为使黎曼 Zeta 函数从不收敛到收敛的值。相关概念如下:

(1) 黎曼 Zeta 函数。

复杂网络中的黎曼 Zeta 函数 $\zeta_G(\alpha)$ 定义如下:

$$\zeta_G(\alpha) := \frac{1}{N} \sum_i \sum_{j \neq i} r_{ij}^{-\alpha} \quad (5)$$

其中, N 为由端点个数确定的图的大小, r_{ij} 为两点之间的距离,即两点之间的最短路径长度,如果点 i 与点 j 之间不存在路径,则 r_{ij} 趋向于无穷大。定义式(5)可以看做是所有端点的距离的加权和。

(2) 狄利克雷级数(Dirichlet series)。

用 Zeta 函数表示为:

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_r S(r)/r^\alpha \quad (6)$$

其中,函数 $S(r)$ 表示为图表面积。

当指数 α 趋向于无穷时,定义式(5)中的和是由点的最近邻居点来决定的,其他情况都趋向于 0。所以, $\zeta_G(\alpha)$ 近似于复杂网络中所有点的平均度。当 α 为 0 时,定义式(5)中的和是由一个一个的点来决定的。这就意味着, $\zeta_G(\alpha)$ 为 $N-1$, 而且随着系统规模的增大,它会趋向于无穷大。

定义式中, $\zeta_G(\alpha)$ 是关于 α 的递减函数,即如果 $\alpha_1 < \alpha_2$, 则 $\zeta_G(\alpha_1) > \zeta_G(\alpha_2)$ 。所以,如果对于某一 α 值, $\zeta_G(\alpha)$ 都是有限的,那么对于其他所有更高值的 α 来说,它也是有限的。如果对于某一 α 值, $\zeta_G(\alpha)$ 都是无限的,那么对于其他所有更低值 α 的来说,它也是无限的。所以说,在图的平均度有效的情况下,至多存在一个 α ,使得 $\zeta_G(\alpha)$ 从有限到无限。这就类似于 Hausdorff 维数函数。

由上面分析,将复杂网络中的维定义为:使 $\zeta_G(\alpha)$ 函数从无限转化到有限的指数 α 的值。为了进一步地理解这个定义,可以考虑到在 d 维规则网络 Z^d 的应用。规则网络 Z^d 为由点和彼此之间连线在坐标轴上的所构成的图。而对于复杂网络来说,当 α 的值等于维数 d 时,复杂网络黎曼 Zeta 函数将从不收敛转换到收敛。

1.3 维的定义三

定义三为:利用一个端点集合的最小遍历树(MST)边的和来计算复杂网络的维^[4]。这种方法已经被证明可以用来计算奇异吸引子的维。同样的,可以将这个办法应用在复杂网络中。测量是基于许多网络模型和真实的复杂网络,但这些测量结果在一定程度上有别于原来的测量。

定义一、定义二中,网络 G 中的两点的距离被定义为两点之间的最短路径的长度,且这个测量必须基于度量空间^[5]。在过去的计算过程中,在网络 G 中的点 u 与点 v 之间的距离 $d(u, v)$ 被看作是两点之间的最短路径的长度。而这个测量必须是基于度量空间。这个度量 d 有时称为路径度量(path metric)而且经常应

用在图论中^[6]。基于该空间的研究证明这种空间不是欧几里德空间(Euclidean space),它的标准是 L^1 标准。而基于欧几里德空间的一般性质都不能应用在该定义中。

2 复杂网络维的性质

2.1 维的性质一

如果满足以下条件的话,函数 $f:U \rightarrow U$ 是bi-Lipschitz,其中 U 是关于维的集合,条件如下:

存在 $\alpha, \beta \in (0, \infty)$,对于所有的 $m, n \in U$, $\alpha ||m - n|| \leq ||f(m) - f(n)|| \leq \beta ||m - n||$

如果 A, B 都属于集合 U 的话,则对于维的定义还需要满足以下条件:

① 单调性:若 $A \subseteq B$,则 $\dim(A) \leq \dim(B)$

② 稳定性: $\dim(A \cup B) = \max\{\dim(A), \dim(B)\}$

③ 不变性:如果函数 $F:U \rightarrow U$ 是bi-Lipschitz的话,则 $\dim(f(A)) = \dim(A)$

当集合 U 包含复杂网络中的点,就不能简单地证明以上的情况,因为向量中的元素对于复杂网络不明显。但是,所有上述的性质在离散规则网络中都是可以满足的,这也是将复杂网络中维的定义降低到离散规则网络中的较为明显的性质的原因。

2.2 维的性质二

一个网络的维数越大,则该网络越复杂。

2.3 维的性质三

在捷径模型中,以概率 $p = 0$ 从一维到二维变化时,其中 p 为捷径的概率,分维数(fractal dimension)变化很快。

3 捷径模型

捷径模型(shortcut model)对研究复杂网络的维是非常重要的。这个模型是在离散规则网络中插入的。文献[7]中对于该模型的描述如下:该模型的分维数是由黎曼Zeta函数来确定的,并且由一维向二维转化。初始的网络是具有 N 个顶点的具有周期边界条件的一维网络,每个顶点只通过一条边与它们的邻居相连。所以在这个系统中只具有 N 个边。这个网络通过下面的方式进行扩张:每一个点以概率 p 增加一个边与远处的 m 个点相连。这里要求 $N \gg m \gg 1$,也就是说 $m = \sqrt{N}$ 。

图将被这样参数化:

大小 = N (7)

捷径的长度 = m (8)

概率 = p . (9)

该过程允许在一维网络和二维网络中间插入模

型。当概率为0时,将会得到一个大小为 N 的一维规则网络。当概率为1时,所有的端点都会与一个新的局部相连并且得到大小为 M 的二维网络并且在方向上具有 N/M 的点。每个点都具有两个方向的边,其中一条边是顺着初始的方向,另一边是顺着捷径的方向。当概率为0到1之间时,得到在一维网络与二维规则网络之间的图。

图1~图3说明了一维、二维以及两者之间维的图。

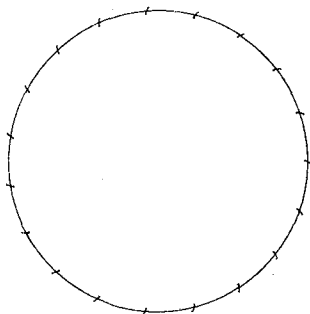


图1 $p = 0$, 一维

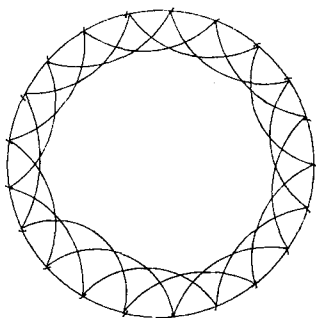


图2 $p = 1$, 二维

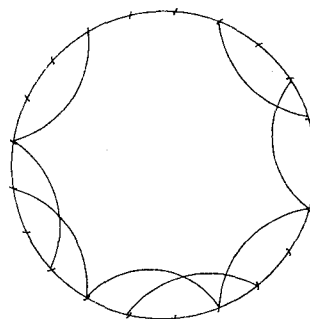


图3 $0 < p < 1$, 一维与二维之间

在文献[3]中,选择中等大小的网络作为研究对象,其中 $N = 3599$, $m = 59$, p 在0.0与0.2之间变动。该值会让该网络近似在二维系统中运行。并且通过公式(3)来计算模型的维度并在双对数坐标图中进行线性回归,从而来研究维与捷径概率的关系。该研究发现,维的定义在中等大小的网络中运行良好。而在实际网络中,网络大小一般都大于我们研究的这个网络^[8]。

对于捷径模型来说,最有效的概述是关于捷径层次的描述。例如,网络通过一个一个的点来扩张,首先以概率 p_1 与新 m_1 端点相连,然后以概率 p_2 与新 m_2 端点相连。要求 $N \gg m_1 \gg m_2 \gg 1$ 。这个扩张的网络的维将会在 d 与 $d+2$ 之间, d 是初始网络的维度。

捷径模型与 Watts 和 Strogatz 的小世界模型之间存在着一定的区别^[9]。在小世界模型中,初始网络为规则网络并以概率 p 添加捷径,但并不要求增加的边的长度是固定值,即捷径的另一个端点可以随机选择。所以,小世界网络类似一个随机图,而不会随着捷径概率的增大成为二维图。

4 维的应用

复杂网络的研究主要集中在复杂网络的一般拓扑结构特性、解释显示网络拓扑结构产生的机制、复杂网络的动力学过程。而维的概念主要应用在幂律分布上,并将其延伸到热力学中。

文献[2]中提到的维在 Ising 模型中应用。Ising 模型是在解释铁磁相变的模型中提出来的。铁磁相变,是指在一定温度下,磁性材料可能突然失去磁性的现象。在 Ising 模型下的哈密顿量,假设自旋数为 N , 则公式可以表示为:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J(r(i,j)) s_i s_j \quad (10)$$

s_i 为自旋的个数, $r(i,j)$ 为点 i 与点 j 的距离, $J(r(i,j))$ 为自旋之间的相互作用。当 J 全都为正的时候,研究铁磁耦变现象。而当 $J(r(i,j))$ 有行为值 $1/r^\alpha$, 就得到了幂律分布。文献中,主要研究幂律分布与每个自旋能量的关系。研究表明:当 α 取一定值的时候, ρ 值呈对数化的分离。

文献[7]中,主要是研究捷径模型的维转变的问题。研究表明,当概率 $p=0$ 时,捷径模型的维将有一

个快速的转变。数学家基于对复杂网络黎曼 Zeta 函数和随机游走的研究,已经对该转变进行了推测。而在该文献中,作者通过不同方法,来证明了此推测。

5 结束语

复杂网络中的维的研究虽然刚刚开始,但进展很快。关于规则网络维的研究已经相当成熟,方法与结论已经形成了一套成熟的理论。这为复杂网络中维的测量奠定了基础,在以后的研究中,将会利用这些理论来进行不断地探索。从各个角度对维进行定义,并研究其性质,利用性质来扩展其应用。总之,通过维的研究来进一步加深对复杂网络的认识,并将其应用在各个领域。

参考文献:

- [1] Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random network[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [2] Shanker O. Defining dimension of a complex network Mod [J]. Phys. Lett. B, 2007, 21: 321-326.
- [3] Shanker O. Complex Network Dimension and Path Counts [J]. Theoretical Computer Science, 2009(9): 1-9.
- [4] 陶少华, 刘玉华. 基于容量维度的复杂网络自相似形研究 [J]. 计算机工程, 2008, 34(2): 175-177.
- [5] 谢和平, 张永平. 分形几何[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1990.
- [6] Buckley F, Harary F. Distance in Graphs[M]. California: Addison-Wesley publishing company, 1990.
- [7] Shanker O. Sharp dimension transition in a shortcut model [J]. J. Phys. A: Math. Theor., 2008, 41(28): 1-7.
- [8] Newman M E J. The structure and function of complex networks[J]. SIAM Review, 2003, 45(2): 167-256.
- [9] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of "small-world" network[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.

(上接第 60 页)

- [2] Hua J P, Liao Q M. Wavelet-based multiscale corner detection[C]// IEEE Proc of ICSP. Beijing: [s. n.], 2000: 341-344.
- [3] Harris C, Satephens M J. A combined corner and edge detector[C]// In Alvey Vision Conference. Manchester: [s. n.], 1988: 147-152.
- [4] Smith S M, Brady J M. SUSAN: A new approach to low level image processing[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 23(1): 45-78.
- [5] 张小洪, 李 博, 杨 丹. 一种新的 Harris 多尺度角点检测[J]. 电子与信息学报, 2007(7): 1735-1738.
- [6] 陈白帆, 蔡自兴. 基于尺度空间理论的 Harris 角点检测[J].

中南大学学报: 自然科学版, 2005, 36(5): 751-754.

- [7] 洪明坚, 张小洪, 杨 丹. 基于 B-样条轮廓方向变化率多尺度表示的角点检测[J]. 计算机应用, 2009, 29(3): 1-5.
- [8] Freeman H, Davis L S. A corner-finding algorithm for chain-coded curves[J]. IEEE Trans. on Comput., 1977, 26(3): 297-303.
- [9] Mokhtarian F, Suomela R. Curvature scale space based image corner detection[C]// Proc. European Signal Processing Conference. Island of Rhodes, Greece: [s. n.], 1998: 2549-2552.
- [10] 汪华琴, 谈国新, 钱小红, 等. 一种基于曲率尺度空间的自适应角点检测方法[J]. 计算技术与自动化, 2007, 26(2): 123-127.