

变形法移动网格求解双曲型守恒律方程研究

陈冬冬^{1,2}, 宋松和¹

(1. 国防科学技术大学 理学院, 湖南 长沙 410073;

2. 中国人民解放军 63892 部队, 河南 洛阳 471003)

摘要:在现有格式的基础上要提高偏微分方程数值解的分辨率,自适应移动网格技术是一种有效而且可行的方法。文中将文献[1]提出的自适应移动网格技术推广到三角形网格,并将该方法用于求解双曲型守恒量方程。用网格自适应技术求解守恒律问题时,当生成新网格之后,需要将旧网格上的函数值更新到新的网格,并保持物理量的守恒性。针对这个问题,文中提出了函数值更新过程中守恒型插值公式的具体形式,并针对二维双曲型守恒律方程进行了仿真实验,取得了满意的结果。

关键词:变形法;移动网格;双曲型守恒律方程组

中图分类号:V211.3

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2010)02-0001-04

Research of Moving Mesh Method Based on Deformation in Solving Hyperbolic Conservation Laws

CHEN Dong-dong^{1,2}, SONG Song-he¹

(1. Science School, National University of Defence Technology, Changsha 410073, China;

2. PLA Unit 63892, Luoyang 471003, China)

Abstract: The adaptive moving mesh method is an efficient and practicable method to enhance the resolution of numerical solution of partial differential equation. Based on the scheme, this paper develops the moving mesh method based on deformation which Liao presented in reference [1] to triangular meshes. When applying adaptive mesh method in solving conservative laws, conservative variables must be updated on new mesh. Considering about this condition, the paper gives the updated equation from old mesh to new mesh in accurate form, and then apply the method to 2-D hyperbolic conservation laws. The simulation experiment results denote that this method is efficient.

Key words: deformation; moving mesh; hyperbolic conservation laws

0 引言

双曲型守恒律方程组是一类拟线性方程组,一般情况下,它们的解析解很难得到,这导致了此类方程数值方法的深入发展。求解双曲型守恒律方程的高精度格式有很多种,如 TVD, ENO 和 WENO 等格式。如何在现有格式的基础上,既能够在光滑区域内高精度数值求解,又可以较好地分辨双曲型守恒律方程的间断是一个十分重要的问题。在这方面,已有许多文章进行了有益的讨论。例如文献[2]讨论了生成双曲型守恒律方程的自适应网格方法;文献[3]在非结构网格上实现自适应局部加密;文献[4]在结构网格上,通过小

波分析的方法实现网格的自适应局部加密;文献[1, 5, 6]用变形法生成自适应移动网格;文献[7]用调和和分析的方法生成自适应移动网格,并在其上解抛物型方程。

变形法首先是由 J. Moser 在文献[8]中提出来的, Liao 在文献[1]中将变形法用于网格生成,并在文献[5, 6]中将其发展。文中的目的是:在非结构网格上,在变形法生成的自适应移动网格上求解双曲型守恒律方程组。受到文献[5]的启示,我们根据解的特征给定监测函数,使解变化较小的区域网格尺度自动地变大,解变化较大的区域网格尺度自动变小,在移动后的网格上运用最小二乘有限体积法求解双曲型守恒方程组。

变形法自适应移动网格的优点是:在保持总的单元和节点数目不变的条件下,网格自动调整疏密跟踪间断的移动,只需增加少量的计算,即可提高计算精度和对间断的分辨能力。

收稿日期:2009-06-11;修回日期:2009-09-26

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571178)

作者简介:陈冬冬(1982-),男,河南商丘人,硕士,工程师,研究方向为偏微分方程数值解及其应用,计算机仿真;宋松和,教授,博士后,研究方向为偏微分方程数值解及其应用,图像图形学。

1 变形法自适应移动网格

这一节介绍变形法自适应移动网格方法^[5]。

变形法起源于微分几何^[8]。设 t_0 时刻在区域 $\Omega(t_0)$, 在其它任意时刻 t , 相应的区域为 $\Omega(t)$ 。变形法构造映射 $\phi(\cdot, t): \Omega(t_0) \rightarrow \Omega(t)$, 使变换的雅可比行列式等于给定的监测函数 $f(x, t)$, 即:

$$J[\phi(x, t)] = \det \nabla \phi(x, t) = f(\phi(x, t), t) \quad (1)$$

$$t_0 \leq t \leq T, x \in \Omega(t_0), \phi(x, t) \in \Omega(t)$$

其中 $x \in \partial\Omega(t_0)$ 时, $\phi(x, t) \in \Omega(t)$ 。

网格映射的构造分两步, 首先, 求解 $\text{div} - \text{curl}$ 方程, 以获得速度场 $w(x, t)$:

$$\text{div} w(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{f(x, t)} \right) \quad x \in \Omega(t)$$

$$\text{curl} w(x, t) = 0 \quad x \in \Omega(t) \quad (2)$$

$$w(x, t) \cdot n = 0 \text{ or } w(x, t) \cdot n = g(x, t), x \in \partial\Omega(t)$$

其中 n 是边界 Γ 外法线向量, g 是由边界移动所确定的边界向量, $t_0 < t < T$ 。式(2)的第二个式子可控制单元的无旋性, 使单元趋于光滑。

其次, 对固定的 $x \in \Omega(t_0)$ 求解以下传输方程 (ODE) 以求得 $\phi(x, t)$:

$$\partial \phi(x, t) / \partial t = f(\phi(x, t), t) w(x, t), t_0 \leq t \leq T \quad (3)$$

监测函数的选择应满足以下要求:

$$\begin{cases} f(x, t) > 0, x \in \Omega(t), t \in [t_0, T] \\ \int_{\Omega(t)} (1/f(x, t)) dx = |\Omega(t_0)| \end{cases} \quad (4)$$

以上两步意味着式(1)是成立的。实际上可证明 $\frac{d}{dt} \left(\frac{J(\phi)}{f(\phi, t)} \right) = 0$, 且因为对于初始状态有 $\frac{J(\phi)}{f(\phi, 0)} = 1$, 故有 $\frac{J(\phi)}{f(\phi, t)} = 1$ 。

由式(1)和(4)知, 监测函数恒为正, 则雅可比行列式 $J(\phi)$ 也总是正的, 因而 ϕ 为一映射。又因为单元的大小正比于雅可比行列式, 因此单元的大小可以通过式(1)中的监测函数 f 而加以控制。由于 f 总是正的, 从而保证移动网格不会交叉^[1]。

文中用最小二乘有限元方法解 $\text{div} - \text{curl}$ 系统, 将式(2)用矩阵形式表示:

$$\sum_{i=1}^n A_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} w(x, t) \right) + A_0 w = F \quad (5)$$

其中 $n = 1, 2, 3$ 为空间维数, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$F = \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{f(x, t)} \right), \dots, 0 \right)^T.$$

对于二维情形有:

$$\text{div} w(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{curl} w(x, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k \quad (6)$$

其中 u, v 分别为 w 沿 x, y 方向的分量。此时式(6)中的 $n = 2$, 有:

$$A_0 = [0], A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

对于三维情形有:

$$\text{div} w(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{curl} w(x, t) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k \quad (7)$$

其中 u, v, w 分别为 w 沿 x, y, z 方向的分量。因此, 式(5)在三维空间中的系数矩阵为:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在实际计算中对于式(3)也是采用差分的形式,

即

$$\phi(x, t + \Delta t) = \phi(x, t) + f(\phi(x, t), t) w(x, t) \Delta t$$

或

$$x_{i+\Delta t} = x_i + f(x_i, t) w(x_i, t) \Delta t$$

其中, $x_i \in \Omega(t), x_{i+\Delta t} \in \Omega(t + \Delta t)$ 。

2 最小二乘有限元方法

根据变分原理, 式(2)的近似解 w 可以由以下的变分形式得到:

$$(Aw, Av) = (f, Av) \quad \forall v \in V \quad (8)$$

要应用最小二乘有限元方法, 就要确定计算区域所需网格单元的数据结构和试验函数空间里的基函数。首先, 把计算区域 Ω 剖分为有限个单元的组合。然后, 定义 Ψ_j 为单元形状函数。则对于每一个单元有:

$$w_h^e = \sum_{j=1}^{N_{\text{ndc}}} \Psi_j \begin{bmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ \dots \\ w_{mj} \end{bmatrix} \quad (9)$$

这里 e 表示某个单元, h 表示网格尺度, N_{ndc} 表示网格单元节点数目。 $(w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{mj})^T$ 表示 w 在第 j 个网格节点上的函数值。

由式(8)和(9), 可以得到系统方程:

$$KW = F \quad (10)$$

这里, W 表示所有网格节点上函数值的向量。系统矩阵 K 及 F 由以下单元组装而成:

$$K_e = \int_{\Omega_e} (A\Psi_1, \dots, A\Psi_{N_{\text{max}}})^T (A\Psi_1, \dots, A\Psi_{N_{\text{max}}}) d\Omega$$

$$F_e = \int_{\Omega_e} (A\Psi_1, \dots, A\Psi_{N_{\text{max}}})^T f d\Omega \quad (11)$$

其中, Ω_e 表示某个单元区域。式(11)里, $A\Psi_j$ 有如下形式:

$$A\Psi_j = \sum_{i=1}^{N_{\text{max}}} A_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} + A_0 \Psi_j \quad (12)$$

对于适定的问题,系统方程(10)里的矩阵总是对称正定的。由式(11)可以看出,对于不同的一阶微分系统式(11)的形式是不变的,只是式(12)中的系数矩阵 A_i 发生变化,这意味着,在编制计算机程序时,对于各种不同的问题只需在程序中改变 A_i ,其它代码可以不变,因此使编程工作大为简化。

由式(5)可知,用最小二乘有限元法求解 $\text{div} - \text{curl}$ 系统时,速度场 $w(x, t)$ 被取为变量,这样做的优点是:可以直接指定任意网格节点(边界节点或内部节点)的速度,从而为内部节点和边界节点的耦合移动提供了方便。

3 函数值的更新

用网格自适应技术求解守恒律问题时,当生成新网格生成之后,需要将旧网格上的函数值更新到新的网格,并保持物理量的守恒性。针对移动网格变形法,根据几何守恒律,守恒量 u 在任意控制体 $A(t)$ 内的变化率等于 $A(t)$ 边界 $\partial A(t)$ 总的流量,因此有

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} u dV = \int_{\partial A(t)} (uw) \cdot n ds \quad (13)$$

这里式(13)左边进行时间离散,右边用 $L - F$ 解算子近似有

$$|A_{t+\Delta t}| \bar{u} = |A_t| \bar{u} + \Delta t \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_k} (\bar{u}w) \cdot n ds$$

$$= |A_t| \bar{u} + \Delta t \sum_{k=1}^3 | \Gamma_k | \sum_{p=1}^q \lambda_p [0.5(\bar{u}_{nk_p} + \bar{u}_{k_p})(w_{k_p} \cdot n_k) - 0.5(\bar{u}_{nk_p} - \bar{u}_{k_p}) \text{abs}(w_{k_p} \cdot n_k)] \quad (14)$$

其中:

$|\cdot|$ 表示对控制体或线段取面积或长度;

\bar{u} 和 \bar{u} 分别为控制体 $A(t + \Delta t)$ 和 $A(t)$ 上的平均值;

Γ_k 为控制体 $A(t)$ 第 k 条边;

n_k 为 Γ_k 的外法向量;

q 表示数值积分时所选用的高斯点的个数;

λ_p 为权值;

\bar{u}_{k_p} 表示控制体 $A(t)$ 上的重构函数在 Γ_k 上第 p 个高斯点的函数值;

\bar{u}_{nk_p} 表示与控制体 $A(t)$ 共用 Γ_k 的三角形上的重构函数在第 p 个高斯点的函数值;

w_{k_p} 为 w 在 Γ_k 上第 p 个高斯点的函数值。

式(14)即守恒型插值公式。因此就可以根据守恒型插值公式给出移动有限体积法的算法:

Algorithm: Input: initial grid x^0 ; conservative variable $u(x^0, 0)$

DO $n = 0, N_{\text{step}}$

Time advancing: $u(x^n, t^{n+1}) = L(u(x^n, t^n))$

Compute monitor function: $f(x^n, t^{n+1}); f(x^n, t^n)$

Solve $\text{div} - \text{curl}$:

$$\begin{cases} \text{div } w(x^n, t^{n+1}) = - \left(\frac{1}{f(x^n, t^{n+1})} - \frac{1}{f(x^n, t^n)} \right) / \Delta t \\ \text{curl } w(x^n, t^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Solve ODEs:

$$x^{n+1} = x^n + f(x^n, t^n) w(x^n, t^n) \Delta t$$

Update conservative variable:

$$u(x^{n+1}, t^{n+1})$$

ENDDO

4 仿真试验

应用中提出的方法,对典型算例平板激波反射和前台阶问题进行了仿真试验,并对试验结果进行了分析比较与说明。仿真结果本方法的是可行的。以下算例均采用文献[9]所提出的最小二乘有限体积方法求解双曲型守恒律方程组,时间方向用二步 TVD 型

Runge - Kutta 法离散。监测函数为 $f = \frac{C_1}{1 + C_2 | \rho_x |}$, 其中 C_2 控制网格自适应强度, C_1 保证监测函数满足式(4)。

算例 1: 平板激波反射问题。

该问题主要考虑斜激波入射在平板上并反射的物理过程,计算区域为 $(0, 4) \times (0, 1)$, 初始值是马赫数为 2.9 的斜激波,左边界和顶边界采用 Dirichlet 条件:

$$(\rho, u, v, p) |_{(0, y, t)} = (1, 2.9, 0, \frac{1}{1.4})$$

$$(\rho, u, v, p) |_{(x, 1, t)} = (1.69997, 2.61934, -0.50633, 1.52819)$$

底部边界为反射边界,右端为超音速出流边界。针对这一问题,采用三角形网格对求解区域进行剖分,单元数 3610,总节点数 1905; $C_2 = 800$ 。图 1 给出自适应前后的网格图像;图 2 给出初始网格和移动网格上的 30 条密度等值线。从数值结果可以看出,网格节点根据监测函数自动调整到激波附近,在激波处网格的尺度变小,从而大大地提高了解的分辨率,而且网格不会产生交叉,说明了自适应移动网格的有效性和可行性。

算例 2:前台阶问题。

假设风洞长 3 个单位,宽 1 个单位,台阶高 0.2 个单位,台阶设置在离风洞入口 0.6 个单位处。初始条件为 $(\rho, u, v, p) = (1.4, 3.0, 0.0, 1.0)$;右边界为入流边界;左边界为出流边界;其余均为反射边界。网格单元数 5464,节点数 2858; $C_2 = 500$ 。图 3 和图 4 分别给出自适应前后的网格图像和密度等值线。

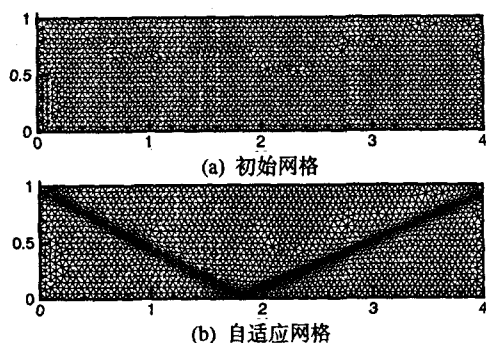


图 1 平板激波反射问题
(初始网格与自适应网格)

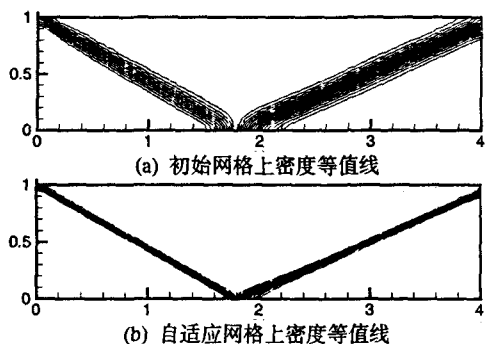


图 2 平板激波反射问题
(初始网格与自适应网格密度等值线)

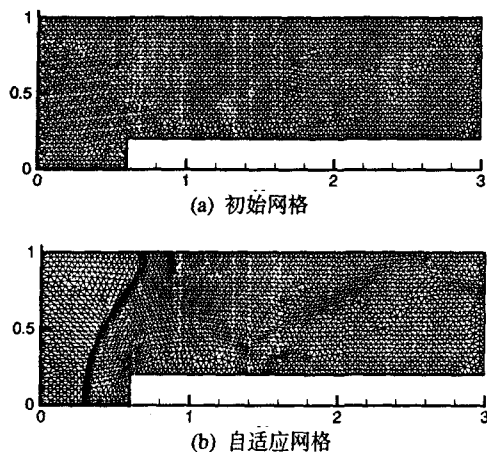


图 3 前台阶问题(初始网格与自适应网格)

对于前台阶问题,在靠近风洞入口附近的激波较强,因此该处的网格比右侧较弱激波附近的网格密。台阶的尖点是一个奇异点,这给数值模拟带来很大的困难,在求解过程中会产生很大的误差,从而污染整个

流场,如图 4(a)所示,因此需对此奇异点进行特殊处理。文献[10]在奇异点附近更改了数值格式,文献[11]选择事先对奇异点周围的网格进行加密。文中既没有更改数值格式,也没有事先对网格进行局部加密,只通过给定的监测函数自动调整网格的疏密。从图 4(b)和图 5 可以看出,在奇异点附近网格变密,从而降低了此点带来的误差,消除了污染,并在激波处提高了数值解的分辨率,取得了很好的数值结果。

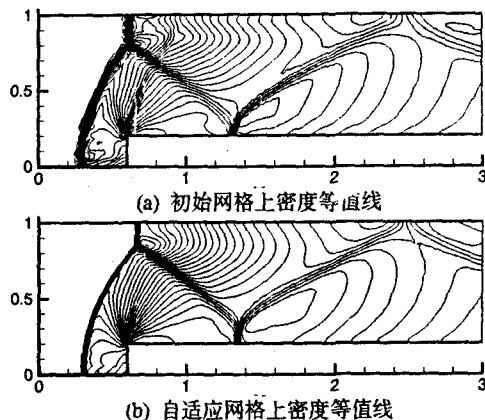


图 4 前台阶问题
(自适应网格上密度等值线)

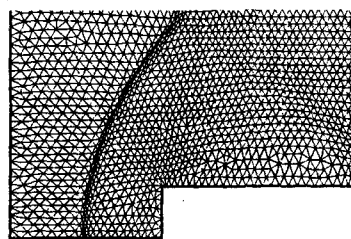


图 5 前台阶问题
(自适应网格尖点网格局部放大)

5 结束语

文中将 Liao 提出的自适应移动网格方法推广到三角形网格,将时间推进和网格自适应分成独立的两步,给出了函数值更新守恒型插值的具体形式,针对二维双曲型守恒律方程组进行了数值实验,并取得了很好的结果。在理论上,通过监测函数可以严格控制网格变形,但是在实际计算过程中,由于误差的影响,不可能精确得到所需的网格,因此进一步提高网格质量是下一步工作的重点。同时,对于不同的问题,监测函数的选取是一个很大的困难,需要进一步研究。

参考文献:

- [1] Liao G, Anderson D A. A New Approach to Grid Generation [J]. Appl. Anal, 1992, 44: 285 - 298.

(下转第 8 页)

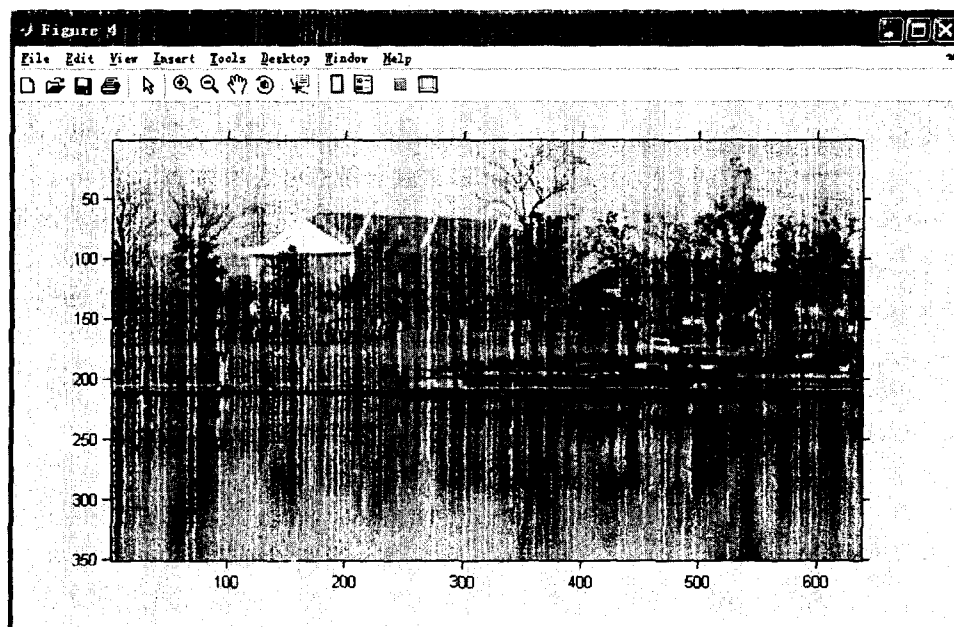


图 5 算法改进后的拼接结果

图 5 所示是算法改进后的拼接结果,实验所得的列是 163,消除了误匹配,匹配效果很好,即为最佳匹配。

5 结束语

在传统比值匹配法的基础上,利用等比例数列的思想改进了算法,改进后的算法利用更大的区域像素信息可以更准确地找到最佳匹配位置,通过大量仿真实验证明了改进后的算法可以有效的消除误匹配,从而提高了算法的准确性和有效性。

参考文献:

- [1] Kanungo T, Mout D M, Netanyahu N S, et al. An efficient K - means clustering algorithm: analysis and implementation [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(7): 881 - 892.
- [2] 钟 力, 胡晓峰. 重叠图像拼接算法[J]. 中国图象图形学报, 1998, 3(5): 44 - 47.
- [3] 汪成为. 灵境(虚拟现实)技术的理论、实现及应用[M]. 南宁: 广西科学技术出版社, 1996.
- [4] 李志刚. 边界重叠图像的一种快速拼接算法[J]. 计算机工程, 2000, 26(5): 37 - 38.
- [5] Hartley R, Gupta R. Linear pushbroom cameras[C]//Third European Conference on Computer Vision. Stockholm, Sweden: [s. n.], 1994: 555 - 566.
- [6] 冈萨雷斯. 数字图像处理[M]. 第 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [7] 王 娟, 师 军, 吴宪祥. 图像拼接技术综述[J]. 计算机应用研究, 2008, 25(7): 1940 - 1943.
- [8] Berger M J, Leveque J L. Adaptive mesh refinement using wave - propagation algorithms for hyperbolic systems[J]. SIAM J. Numer. Anal. , 1998, 35: 2298 - 2316.
- [9] 张来平. NND 格式在非结构网格中的推广[J]. 力学学报, 2000, 25(2): 135 - 141.
- [10] Cohen A, Kaber S M, Postel M. Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for Conservation Laws[J]. Math. Comput. , 2003, 71: 182 - 225.
- [11] Cai X X, Fleitas D, Jiang B, et al. Adaptive grid generation based on least - squares finite - element method[J]. Comput. Math. Appl. , 2004, 48(7): 1077 - 1086.
- [12] Semper B, Liao G. A moving grid finite element method using grid deformation[J]. Numer. Meth. Part. Diff. Eq. , 1995, 11: 603 - 615.
- [13] Li R, Tang T, Zhang P W. Moving mesh methods in multiple dimensions based on harmonic maps[J]. J Comput. Phys. , 2001, 170: 562 - 588.
- [14] Moser J. Volume Elements of a Riemann Manifold[J]. Trans AMS. , 1965, 120: 286 - 294.
- [15] 宋松和, 全慧云. 二维非结构网格的非振荡有限体积方法[J]. 数值计算与计算机应用, 2001(3): 161 - 164.
- [16] Woodward P, Colella P. The Numerical simulation of two - dimension fluid flow with strong shocks[J]. J Comput. Phys. , 1984, 54: 115 - 173.
- [17] Hu C Q, Shu Q W. Weighted essentially non - oscillatory schemes on triangular meshes[J]. J Comput. Phys. , 1999, 150(1): 97 - 127.

(上接第 4 页)