

脉冲时滞 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性

吴桂华, 廖晓峰

(重庆大学 计算机学院, 重庆 400044)

摘 要: 研究一类具有脉冲控制的时滞 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性, 通过 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论和 Halanay 不等式等方法, 构造合适的 Lyapunov 泛函, 利用不等式技巧得到了确保时滞神经网络在脉冲控制下全局指数稳定的一个充分条件, 保证了 Hopfield 神经网络在脉冲控制下的全局指数稳定, 并估计了系统的指数收敛率。为了便于计算和验证结论的有效性, 给出一个简化的充分条件。最后通过数值实例的实验仿真证实了结论的有效性、可行性。

关键词: 脉冲控制; 时滞; Halanay 不等式; 全局指数稳定

中图分类号: TP393

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2009)09-0025-03

Global Exponential Stability of Hopfield Neural Networks with Delays and Impulses

WU Gui-hua, LIAO Xiao-feng

(College of Computer Science of Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: In this paper, a model of Hopfield neural networks with delays and impulses is considered. By using the Lyapunov-Krasovskii stability theory and Halanay inequality with Lyapunov function and inequality skill, a new sufficient condition for global exponential stability of impulsive delay model are obtained, ensure the stability of Hopfield Neural Network with impulses, and estimated the rate of convergence. A simply sufficient condition is given for the calculation and verification. An example is given to illustrate the validity of theory.

Key words: impulse; delay; Halanay inequality; exponential stability

0 引言

在过去的几十年里神经网络得到了广泛深入的研究, 并被广泛应用于信号处理、最优化及求解非线性代数问题等^[1-3]。它的很多基本性质如稳定性、振荡性及收敛性, 也都得到了广泛的研究。但在自然界中, 有许多连续渐变过程或系统中, 由于某种原因, 在极短的时间内系统状态可能遭受突然的改变或干扰, 从而改变原来的运动轨迹, 例如, 药剂学中的定时给药的过程, 种群生态系统的定时捕捞或补给, 电路系统中开关的闭合, 通信中的调频系统, 经济学中的一些最优控制模型, 机械运动过程或其它振动过程突然遭受的外加强迫力(如打击或碰撞), 等等, 这些突变多是以脉冲的形式表现出来。

这种形式的动力学行为既不能用完全连续的形式

表述也不能用完全离散的形式来表述, 于是在 1990 年 Guan 和 Chen^[4,5]在传统的 Hopfield 神经网络中引入脉冲扰动并研究了系统的全局指数稳定、平衡点的存在唯一性。也正是脉冲神经网络在的应用越来越重要, 它的许多性质在近些年来得到了广泛的研究^[1-3,6-8], 比如周期解的存在性、周期边值问题、解的稳定性。系统的稳定性条件得到越来越多学者的关注并不断涌现出新的成果^[9-13]。文中通过 Lyapunov 函数 Halanay 不等式技术得到一个脉冲神经网络全局指数稳定的充分条件。

1 系统描述和预备知识

文中考虑如下的脉冲时滞 Hopfield 神经网络:

$$\begin{cases} x'(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau)), \\ t \neq t_k \\ x(t) = H_k x(t^-) + W_k x((t-\tau)^-), t = t_k \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ 为网络在 t 时刻的状态向量。 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 和 $B = (b_{ij}) \in R^{n \times n}$ 为神经元连接权重, $f(y) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$

收稿日期: 2008-12-20; 修回日期: 2009-03-02

基金项目: 重庆市自然科学基金(2008BB2182)

作者简介: 吴桂华(1983-), 男, 福建莆田人, 硕士研究生, 研究方向为非线性理论; 廖晓峰, 博士生导师, 研究方向为非线性理论、信息安全。

为神经元激活函数,文中假设激活函数满足条件:

(H):对任意的 $x_i, y_i \in R (i = 1, 2, \dots, n)$, 存在常数 $L_i > 0, M_i > 0$ 使得 $|f_i(x_i)| \leq L_i |x_i|, |f_i(x_i) - f_i(y_i)| \leq M_i |x_i - y_i|$ 。

$\tau > 0$ 是传输时延,假设 $y(t)$ 是左连续函数且 $y(t^-) = y(t)$ 。 H_k 和 W_k 用来刻画在 t_k 时刻神经元的脉冲强度。系统满足如下的初始条件:

$$u(t_0 + s) = \varphi(s) \in PC \quad -\tau \leq s \leq 0 \quad (2)$$

其中 $PC = \varphi: [-\tau, 0] \rightarrow R^n$, φ 是连续的。文中记 P^T 为矩阵 P 的转置, $\rho(P)$ 表示矩阵 P 的谱半径, $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别表示 P 的最小和最大特征值。 $P > 0 (\geq, <, \leq 0)$ 表示矩阵 P 为对称正定(半正定、负定、半负定)矩阵。

引理 1(Halanay inequality) 令 ω 是定义在区间 $[t_0 - \tau, \infty)$ 上的非负函数,并在子区间 $[t_0, \infty)$ 上连续,若 $\dot{\omega}(t) \leq -a\omega(t) + b\omega(t - \tau), a > b > 0, t \geq t_0$, 则

$$\omega(t) \leq \bar{\omega}_0 \exp\{-\lambda(t - t_0)\}, t \geq t_0$$

其中, $\bar{\omega}_0 = \sup_{t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0} \omega(\theta), \lambda > 0$ 满足 $-a + b \exp\{\lambda\tau\} = -\lambda$ 。

引理 2 对任意给定的实矩阵 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 和常数 $\varepsilon > 0$ 满足 $0 < \Sigma_3 = \Sigma_3^T$, 则下面的不等式成立:

$$\Sigma_1^T \Sigma_2 + \Sigma_2^T \Sigma_1 \leq \varepsilon \Sigma_1^T \Sigma_3 \Sigma_1 + \varepsilon^{-1} \Sigma_2^T \Sigma_3^{-1} \Sigma_2$$

2 稳定性分析

定理 1: 若条件(H)成立且存在 $P > 0$ 和正定对角矩阵 Q, R, S 常数 $g > h > 0$ 满足以下条件:

$$(H1) \quad \Omega + gP \leq 0$$

$$(H2) \quad \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2 \lambda_{\max}(P^{-1}R) \leq h$$

(H3) 存在常数 γ 使得

$$\frac{\ln \gamma_k}{t_k - t_{k-1}} \leq \gamma \leq \lambda, k = 1, 2, \dots$$

其中

$$\Omega = -CP - PC + PAQ^{-1}A^T P + PBR^{-1}B^T P + \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2 Q$$

$$\gamma_k \geq \max\{1, \rho(M_k) + \rho(N_k)e^{\lambda\tau}\}$$

$$M_k = (H_k^T P H_k + H_k^T S^{-1} H_k) P^{-1}$$

$$N_k = (W_k^T P W_k + W_k^T P S P W_k) P^{-1}$$

λ 是方程 $\lambda - g + h e^{\lambda\tau} = 0$ 的唯一正根。

则:

1) 若 $\lambda = \gamma$ 系统(1)的零平衡点是一致稳定的。

2) 若 $\lambda > \gamma$ 系统(1)的零平衡点是全局指数稳定的。

证明:构造李雅普诺夫函数 $V(x(t)) = V(t, x)$

$= x^T P x$, 当 $t \neq t_k$ 时, 计算 $V(t, x)$ 的狄尼导数:

$$\begin{aligned} D^+ V(t, x(t)) &= 2x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= 2x^T P [-Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau))] \\ &= x^T(t)(-PC - CP)x(t) + 2x^T(t)PAf(x(t)) + 2x^T(t)PBf(x(t - \tau)) \end{aligned} \quad (3)$$

由引理 2 有:

$$2x^T(t)PBf(x(t - \tau)) \leq x^T(t)PBR^{-1}BPx(t) + f^T(x(t - \tau))Rf(x(t - \tau)) \quad (4)$$

$$2x^T(t)PAf(x(t)) \leq x^T(t)PAQ^{-1}APx(t) + f^T(x(t))Qf(x(t)) \quad (5)$$

把条件(H)和(4)(5)代入(3)有:

$$\begin{aligned} D^+ V(t, x(t)) &\leq x^T(t)(-PC - CP)x(t) + x^T(t)PAQ^{-1}A^T Px(t) + f^T(x(t))Qf(x(t)) + x^T(t)PBR^{-1}B^T Px(t) + f^T(x(t - \tau))Rf(x(t - \tau)) \\ &\leq x^T(t)(-PC - CP)x(t) + x^T(t)PAQ^{-1}A^T Px(t) + \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2 x^T(t)Qx(t) + x^T(t)PBR^{-1}B^T Px(t) + \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2 x^T(t - \tau)Rx(t - \tau) = -gx^T(t)Px(t) + x^T(t)(-PC - CP + PAQ^{-1}A^T P + PBR^{-1}B^T P + \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2 Q + gP)x(t) + \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2 \lambda_{\max}(P^{-1}R)x^T(t - \tau)Px(t - \tau) \leq -gV(x(t)) + hV(x(t - \tau)) \end{aligned} \quad (6)$$

现在对每个不同的区间进行考虑:

(1) 当 $t \in [t_0, t_1]$ 由引理 1 有:

$$V(x(t)) \leq \bar{V}_0 \exp\{-\lambda(t - t_0)\}$$

当 $t = t_1$ 时有:

$$\begin{aligned} V(t_1, x(t_1)) &= (H_1 x(t_1^-) + W_1 x((t_1 - \tau)^-))^T P (H_1 x(t_1^-) + W_1 x((t_1 - \tau)^-)) = x^T(t_1^-) H_1^T P H_1 x(t_1^-) + x^T(t_1^-) H_1^T P W_1 x((t_1 - \tau)^-) + x^T((t_1 - \tau)^-) W_1^T P H_1 x(t_1^-) + x^T((t_1 - \tau)^-) W_1^T P W_1 x((t_1 - \tau)^-) \leq x^T(t_1^-) H_1^T P H_1 x(t_1^-) + x^T(t_1^-) H_1^T S^{-1} H_1 x(t_1^-) + x^T((t_1 - \tau)^-) W_1^T P S P W_1 x((t_1 - \tau)^-) + x^T((t_1 - \tau)^-) W_1^T P W_1 x((t_1 - \tau)^-) \leq \rho(M_1) V(x(t_1^-)) + \rho(N_1) V(x((t_1 - \tau)^-)) \leq \rho(M_1) \bar{V}_0 e^{-\lambda(t_1 - t_0)} + \rho(N_1) \bar{V}_0 e^{-\lambda(t_1 - \tau - t_0)} \leq (\rho(M_1) + \rho(N_1)) e^{\lambda\tau} \bar{V}_0 e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \end{aligned}$$

(2) 当 $t \in [t_1, t_2]$ 由引理 1:

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq \left[\sup_{t_1 - \tau \leq \theta \leq t_1} V(x(\theta)) \right] \exp\{-\lambda(t - t_1)\} \\ &\leq \max\left\{ \sup_{t_1 - \tau \leq \theta \leq t_1} V(x(\theta)), V(x(t_1)) \right\} \exp\{-\lambda(t - t_1)\} \\ &\leq \gamma_1 \bar{V}_0 \exp\{-\lambda(t - t_0)\} \end{aligned}$$

当 $t = t_2$ 有

$$V(x(t_2)) \leq [\rho(M_2) + \rho(N_2)e^{\lambda\tau}] \gamma_1 \bar{V}_0 e^{-\lambda(t_2 - t_0)}$$

(3) 当 $t \in [t_{k-1}, t_k]$ 有:

$$V(x(t)) \leq \gamma_1 \cdots \gamma_{k-1} \bar{V}_0 e^{-\lambda(t - t_0)} \quad (7)$$

当 $t = t_k$

$$V(x(t_k)) \leq [\rho(M_k) + \rho(N_k)e^{\lambda\tau}] \gamma_1 \cdots \gamma_{k-1} \bar{V}_0 e^{-\lambda(t_k - t_0)} \quad (8)$$

综合(6),(7),(8)得到:

$$V(x(t)) \leq \gamma_k \gamma_0 \cdots \gamma_{k-1} \bar{V}_0 e^{-\lambda(t - t_0)}$$

对任意 $t \in [t_k - \tau, t_k]$

由(H3)有 $\gamma_k \leq e^{\gamma(t_k - t_{k-1})}$, 故有:

$$V(x(t)) \leq e^{-\lambda(t_1 - t_0)} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdots e^{-\lambda(t_{k-1} - t_{k-2})} \bar{V}_0 e^{-\lambda(t - t_0)} \\ \leq \bar{V}_0 e^{\gamma(t - t_0)} e^{-\lambda(t - t_0)} = \bar{V}_0 e^{-(\lambda - \gamma)(t - t_0)}$$

从而定理得证。

推论 1: 若

$$(1) g = 2\lambda_{\min}(C) - 2 - \lambda_{\max}(A^T A) \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2$$

$$h = \lambda_{\max}(B^T B) \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2$$

(2) 存在常数 γ 使得

$$\frac{\ln \gamma_k}{t_k - t_{k-1}} \leq \gamma \leq \lambda, k = 1, 2, \dots$$

其中

$$\gamma_k \geq \max\{1, \rho(M_k) + \rho(N_k)e^{\lambda\tau}\}$$

$$M_k = 2H_k^T H_k \quad N_k = 2W_k^T W_k$$

λ 是方程 $\lambda - g + he^{\lambda\tau} = 0$ 的唯一正根, 则 $\lambda > \gamma$, 系统(1)的零平衡点是全局指数稳定的。

证明: 考虑 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T x$, V 在 $[t_k, t_{k+1})$ 上的导数是

$$V(x(t)) = 2x^T(t)\dot{x}(t) = 2x^T(t)(-Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau))) = -2x^T(t)Cx(t) + x^T(t)Af(x(t)) + f^T(x(t))A^T x(t) + x^T(t)Bf(x(t - \tau)) + f^T(x(t - \tau))B^T x(t) \leq -2\lambda_{\min}(C)x^T(t)x(t) + 2x^T(t)x(t) + f^T(x(t))A^T Af(x(t)) + f^T(x(t - \tau))B^T Bf(x(t - \tau)) \leq -[2\lambda_{\min}(C) - 2 - \lambda_{\max}(A^T A) \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2]x^T(t)x(t) + \lambda_{\max}(B^T B) \max_{i=1,2,\dots,n} L_i^2 x^T(t - \tau)x(t - \tau) = -gV(x(t)) + hV(x(t - \tau))$$

余下的证明与定理 1 相类似。

特别的, 当选择 $t_k - t_{k-1} \equiv \delta$ 并且令 $H_k = \alpha_k \cdot E$ and $W_k = \beta_k \cdot E$ (α_k, β_k 是非负常数), 则定理 1 显然有以下推论。

推论 2: 令 $t_k - t_{k-1} \equiv \delta$ 且 $H_k \equiv \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $W_k \equiv \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 。假设(H)成立。且 $g > h > 0$, $\gamma\delta - \ln \gamma_k > 0$, 其中 g 和 h 满足定理 1 的条件, $\gamma_k \geq \max\{1, 2\alpha_k^2 + 2\beta_k^2 e^{\lambda\tau}\}$ λ 是方程 $\lambda - g + he^{\lambda\tau} = 0$ 唯一的正根。

注: 由推论 2 中可以看出影响系统(1)全局指数稳定的主要因素有两个: 一个是脉冲强度 H_k 和 W_k , 另一个就是脉冲频率 δ 。

3 数值实例

下面通过一个实例来说明上面结论的正确性和有效性。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - 1)), \\ t \neq t_k \\ x(t_k) = H_k \cdot x(t_k^-) + W_k \cdot x((t_k - \tau)^-), \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

其中:

$$f_1(x) = f_2(x) = 0.5(|x + 1| + |x - 1|)$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.20 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.1 & -1.5 \end{bmatrix}$$

显然激活函数满足条件(H) 则从推论 1 可以直接得到 $g = 4.9133$, $h = 2.8800$ 并解得 $\lambda = 1.0073$, 选择如下的脉冲强度。

$$H = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

则 $\max(\log \gamma_k) = 0.6635$, 从而求得 $\delta^* = \min(\delta) = 0.6587$, 则当 $\delta > \delta^*$ 系统(1)是指指数稳定的, 则该系统的零平衡点是全局稳定的如图 1 所示。

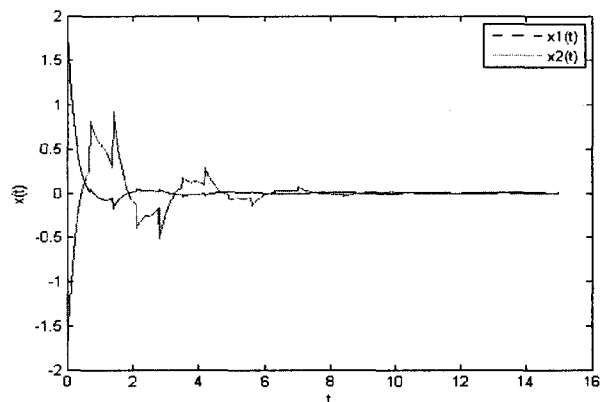


图 1 $\delta = 0.7$ 时 $x(t)$ 的稳定状态图

注: 随着 δ 的增大, $\lambda - \gamma$ 的值随之增大, 系统(1)的指数收敛速度也越快。选择适当的 δ 可以改变系统的收敛速度。

4 结束语

研究了具有时滞脉冲的 Hopfield 神经网络, 在激活函数无需满足单调性、光滑性的条件下, 得到零平衡点的全局指数稳定的充分条件, 并得到了指数收敛的收敛率。

进一步若将所考虑的系统退化为非脉冲系统, 结论是同样有效的。

(下转第 31 页)

结果图,从图 1 和图 2 可以看出 IARED 算法比 ARED 算法平均队列长度变化平稳,有效控制了队列的波动,同时仿真也对 IARED 和 ARED 算法的瞬时队列进行了比较,IARED 算法的实际队长都不超过 22,而 ARED 算法的瞬时队长一度达到了 60,其实际队列长度波动很大,这说明 IARED 算法能很好地适应突发流量,降低实际队长从而降低平均队长,减少丢包。从而使队列管理达到低延迟和低抖动,如图 5 和图 6, IARED 算法的排队延迟明显低于 0.03s,而 ARED 算法的平均排队延迟大于 0.05s。从图 3 和图 4 可看出, IARED 算法的丢包率在 0.2 左右,不超过 0.21,而 ARED 算法的丢包率达到了 0.3。从以上分析, IARED 算法的各项性能均优于 ARED 算法。

4 结束语

鉴于 RED 和 ARED 对自相似网络环境适应的不足之处,提出了一种自相似流量下的主动队列管理算法—IARED 算法。根据网络流量自相似性的特点,利用自相似流量的自相关函数来设置平均队列长度计算公式的权值,利用平均队列长度与目标队列长度的变化率和平均队列长度与上一时刻的平均队列长度的变化率两个参数动态改变 \max_p 。仿真实验结果表明该算法能很好地适应自相似网络的流量变化。同时明显降低丢包率和保持较低的排队延迟。算法也存在不足之处,算法必须预先知道自相似流量的 H 参数值,后期的研究工作是如何将自相似流量的 H 值在线测量

技术引入到算法中,而不必预先测量流量的 H 值。

参考文献:

- [1] Leland W E, Willinger W, Taqqu M S, et al. On the self-similar nature of Ethernet traffic (extended version) [J]. IEEE/ACM Trans. Networking, 1994,2(1):1-15.
- [2] Lawrence Berkeley National Laboratory. The Internet Traffic Archive[EB/OL]. 1989. <http://ita.ee.lbl.gov/html/traces.html>.
- [3] Floyd S, Jacobson V. Random early detection gateways for congestion avoidance[J]. IEEE/ACM Trans. on Networking, 1993,1(4):397-413.
- [4] Feng W, Kandlur D, Saha D, et al. A Self-configuring RED Gateway[C]// IEEE INFOCOM'99. New York, USA: [x. n.], 1999:1320-1328.
- [5] 汪浩,严伟. 基于自相似聚合业务流量的 AQM 算法性能评价[J]. 软件学报, 2006,17(9):1958-1968.
- [6] 舒炎泰,董林芳,高德云. 基于自相似业务的 RED 算法性能研究[J]. 计算机工程, 2006,32(22):104-106.
- [7] Alemu T, Jean-Marie A. Dynamic Configuration of RED Parameters[J]. IEEE Communications Society Globecom, 2004,3:1600-1604.
- [8] 黄迎春,李向胃,邱保右. 一种改进的 RED 算法[J]. 计算机工程, 2007,33(1):117-119.
- [9] 汪岩,安建平,金鸿玲. 一种基于自相似流量速率估计的主动队列管理算法[J]. 计算机应用, 2005,25:23-28.
- [10] 温显晖,朱祥华,张勇. 自相似流量的主动队列管理算法[J]. 电子与信息学报, 2006,28(7):1303-1307.

(上接第 27 页)

参考文献:

- [1] Gopalsamy K. Stability of artificial neural networks with impulses[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004,154: 783-813.
- [2] Li Chuandong, Liao Xiaofeng. Global robust asymptotical stability of multi-delayed interval neural networks: An LMI Approach[J]. Physics Letters A, 2004,328:452-462.
- [3] Xu Daoyi, Yang Z C. Impulsive delay differential inequality and stability of neural networks[J]. J. Math. Anal. Appl, 2005,305:108-120.
- [4] Wang min, Xiong Qiyuan, Zhou Bingxiao, et al. Global exponential stability of cellular neural networks with mixed delays and impulses[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007,34:896-902.
- [5] Huang Zai-Tang, Yang Qi-Gui, Luo Xiao-shu. Exponential stability of impulsive neural networks with time-varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008,35:770-780.
- [6] Guan Z H, Chen G R. On delayed impulsive Hopfield neural networks[J]. Neural Networks, 1999,12:273-280.
- [7] Zhang Yu, Sun Jitao. Stability of impulsive neural networks with time delays[J]. Physics Letters A, 2005,348:44-50.
- [8] Guan Z H, James L, Chen G. On impulsive auto-associative neural networks[J]. Neural Networks, 2000,13:63-69.
- [9] Wu Wei, Cui Baotong. Global robust exponential stability of delayed neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008,35:747-754.
- [10] Li Y K, Lu L. Global exponential stability and existence of periodic solution of Hopfield-type neural networks with impulses[J]. Physics Letters A, 2004,333:62-71.
- [11] 季策,张化光. 具有参数的时滞 Hopfield 神经网络的鲁棒稳定性[J]. 电子学报, 2005,33:115-118.
- [12] Liao Xiaofeng, Wong Kwok-wo, Leung C. Hopf bifurcation and chaos in a single delayed neuron equation with nonmonotonic activation function[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2001,28:1535-1547.
- [13] 张恩彪,江成顺. 具时滞脉冲细胞神经网络的全局指数稳定性[J]. 动力学与控制学报, 2006,4(1):88-91.