基于压缩传感理论的数据重建

李 波,谢杰镇,王博亮
(厦门大学 信息科学与技术学院,福建 厦门 361005)

摘 要:随着信息技术的不断发展,人们对信息需求量越来越大,这给信号采样、传输和存储的实现带来的压力越来越大。近年来国际上出现的压缩传感理论为该问题的解决提供了新的解决方案。压缩传感理论首先将信号投影到一个低维的信号空间,然后通过解一个基于凸优化的非线性恢复算法将信号恢复,而仅仅需要很少的数据。介绍了CS理论框架并对其中存在的难点问题进行了探讨,主要有稀疏近似理论、观测矩阵、信号重建算法。最后将压缩传感理论应用到一维和二维图像数据重建中并给出了仿真结果。实验结果表明,该方法与传统压缩方法相比具有更高的压缩比,并且能够得到更小的压缩误差。

关键词:信号采样;压缩传感;稀疏;凸优化;信号重建

中图分类号:TP391.41 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2009)05-0023-03

Signal Reconstruction Based on Compressed Sensing

LI Bo, XIE Jie-zhen, WANG Bo-liang
(Dept. of Information Science & Technology, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: With the development of information technology, the demands for information are increasing dramatically, which causes a series of challenges in signal sampling, transmission and storage. An emerging theory of compressed sensing (CS), which is presented in recent years, provides a new method for solving this problem. CS project a singnal into a lower dimension at frist, then by using nonlinear recovery algorithms (based on convex optimization), super-resolved signals and images can be reconstructed from what appears to be highly incomplete data. Introduces the processing of the signal sparse representation, observation matrix and recovery algorithms and focus on the theoretical framework of compressed sensing and discusses the existing difficult problems. Apply this new theory to data of one dimension and image of two dimensions and give the simulated result in the end. Experiments proved CS is higher compression ratio and smaller compression error than traditional data compression algorithm.

Key words: signal sampling; compressive sensing; sparsity; convex optimization; signal reconstruction

0 引 言

人们平时接触的绝大部分信号都是模拟的,但现代信息处理中能处理的信号却只能是数字化的,所以对信号进行采样(signal sampling)和量化是对信号进行现代信息处理的前提条件。奈奎斯特采样定理指出:无失真地从离散信号中恢复原信号,其采样速率至少是信号带宽的2倍。然而随着人们对信息需求量的增加,携带信息的信号带宽越来越宽,所要求的采样速率和处理速度越来越高,而现实中的硬件发展水平如A/D的速率已经达到极限,这无疑给信号的采集、存储、传输和处理等带来了巨大的压力。

另一方面,在许多系统中可以看见,利用数据的冗余性,将采样量化后的数据马上进行压缩,丢掉一些不重要的信息,以此来降低数据量,进而减轻在奈奎斯特采样定理这个基本原则下给现代信号处理带来的诸多压力。对数据进行采样后马上进行数据压缩,是否可以认为是传统采样方式不可避免地对一些并不是十分重要的信息进行了采样呢?能否在只进行少量的采样的情况下也能达到很好的恢复信号的效果呢?

最近提出的压缩传感(compressed sensing or compressed sampling, CS)就是对以上问题的解答。Donoho的研究表明大部分的信号都是稀疏的或是可压缩的,其中绝大部份的信息都是不太重要的,去除这些不太重要的信息而仅仅保留重要的信息对信号是没有多大的损害的。根据信号的稀疏性,只需要低于奈奎斯特采样率很多的少量采样,就可以将信号很好地恢复[1]。

收稿日期:2008-09-15
基金项目:国家自然科学基金(30770561)
作者简介:李 波(1985-),男 湖北荆州人 硕士研究生,研究方向为医学图像处理、医学电子与计算机应用技术;王博亮,教授,研究领域为医学成像与图像处理、虚拟人体器官建模与仿真、生物信息检测与控制。

1 采样问题分析

传统的数据处理和压缩传感处理方法有所不同，图 1 可以看出，运用压缩传感理论，在采样过程的同时也完成了压缩，所以采样的数据量大大减小。奈奎斯特采样是均匀等间隔采样，而 CS 的采样是随机采样。尽管压缩传感理论提出之初针对的是离散的数字信号，但已经有学者在研究其在模拟信号向数字信息转换过程中的作用，并提出了模拟－信息采样(Analog－to－Information)理论[2]，图 2 是模拟信息转换器(Analog－to－information converter，AIC)的设计框架。

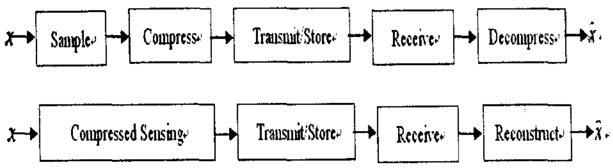


图 1 传统数据处理和 CS 数据处理的比较

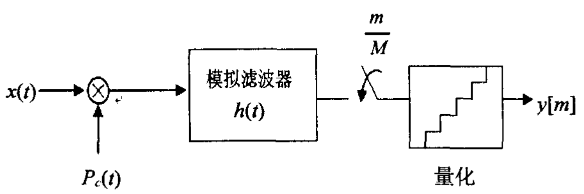


图 2 AIC 设计方案

尽管 CS 可以以很少的采样重建原始信号，但是其在信号恢复过程中的算法具有一定的复杂度，实质上是把采样复杂性转移到了计算复杂性，但这是可行的，一定的计算复杂性是可以承受的，尤其对于处理超宽带信号这个好处就凸显出来。

文中讨论如下的采样机制：信号 $f(t)$ 的采样信息由下面的式子表达：

$$y_k = < f, \boldsymbol{\varphi}_k >, k = 1, \cdots, m \tag{1}$$

其中的 $\boldsymbol{\varphi}_k, k = 1, \cdots, m$ 是一组正交的基向量。尖括号表示求点积。例如 $\boldsymbol{\varphi}_k$ 是由 δ 函数组成的基向量，那么 $\boldsymbol{y}$ 就是在时域的采样值；如果 $\boldsymbol{\varphi}_k$ 是由正弦函数组成的基向量，那么 $\boldsymbol{y}$ 就是在频域的傅里叶系数。在核磁共振采集图像(MRI) 中就用到了这一组由正弦函数组成的基向量[3]。

对式(1) 进行数学变形就可以得如下的矩阵：$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi} f$，其中 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 表示由 y_k 和 $\boldsymbol{\varphi}_k, k = 1, \cdots, m$，组成的向量，$\boldsymbol{v}$ 表示由 $\boldsymbol{v}_k, k = 1, \cdots, n$ 组成的向量。

2 稀疏近似理论

假设基向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 表示在 R^n 上的一组正交基。一个在 R^n 空间下的信号向量 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为一个 n 维系数向量 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{A})$ 和基向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的线性组合：$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\boldsymbol{A})\varphi_i$，其中 $\theta_i(\boldsymbol{A}) = < \boldsymbol{A}, \varphi_i >$，其中的尖括号仍然表示求点积。为了方便起见，假设 $|\theta_1| \geq |\theta_2| \geq \cdots \geq |\theta_n|$。稀疏近似理论就是寻找信号 $\boldsymbol{A}$ 的一组系数表示 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{A})$，并且要求 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{A})$ 是稀疏的。因此选前 k 个系数来对信号 $\boldsymbol{A}$ 进行重建，即 $\hat{\boldsymbol{A}} = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(\boldsymbol{A})\varphi_i$，其中 $k \ll n$，并称信号是 k 稀疏的。很明显，$\hat{\boldsymbol{A}}$ 是近似 $\boldsymbol{A}$ 的。它们之间的误差一般表示为 $\| \hat{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A} \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A})^2$，用 Parseval 定理证明可得这个误差，可以表示为 $\| \theta(\boldsymbol{A}) - \theta(\hat{\boldsymbol{A}}) \|_2^2 = \sum_{i=k+1}^{n} \theta_i^2$。过去的研究主要集中在 α 指数衰退的情形，即 $|\theta_i| = o(2^{-\alpha i})$，最近研究主要集中在 p 压缩上的情形，即 $|\theta_i| = o(i^{-1/p})$。因此 $\| \hat{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A} \|_2^2 \leq o(k^{1-2/p})$[4]。

3 压缩传感理论

前面提到的常规的采样或者是稀疏变换都是在等维的空间下进行的。由线性理论可以知道这种方程式唯一解。E. Candès 在他最近的论文中证明了：如果一个信号在某个基向量下是稀疏的，那么它可以从在另外一个不相关的空间基上的少量投影(观测值向量)恢复出来，即只要知道信号在某一个正交的空间具有稀疏性这一先验知识，就能以较少的采样点完全或以很高概率重建原始信号，压缩传感就是在这个证明的基础上建立起来的。压缩传感可以由如下的数学形式来进行抽象：

$$\boldsymbol{y} = A x \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 维的矩阵，$m \ll n$；$\boldsymbol{x}$ 是一个 $n \times 1$ 的稀疏向量，表示输入信号；$\boldsymbol{y}$ 是一个 $m \times 1$ 的向量，表示观测值。假设信号 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{\Psi}$ 这个基向量下是稀疏的，也可以用如下的数学形式来对压缩传感进行抽象：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi\Psi x} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}$ 是一个 $m \times n$ 维的矩阵，可以认为是对稀疏数据的观测矩阵。很明显，压缩传感中有三个主要问题：

(1) 怎样寻找基向量 $\boldsymbol{\Psi}$ 使信号在该基上的投影是稀疏的；

(2) 如何构造观测矩阵，即它应该满足什么样的性质；

(3) 因为方程(2) ～ (3) 是一个欠定方程，应该用什么样方法来得到最优解，即和原信号 $\boldsymbol{x}$ 最接近的那个解呢？

第 1 个问题经常使用的有傅里叶变换基、DCT 变换基、小波变换基等等。对于问题(2) 观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 必须满足与稀疏变换基 $\boldsymbol{\Psi}$ 的不相干特性是 CS 具有良好性能的基础。例如：利用 DCT 变换基作为稀疏变换的变

换基 $\boldsymbol{\Psi}$ 而用 $\boldsymbol{\delta}$ 函数基作为观测矩阵的基向量 $\boldsymbol{\Phi}$ 就可以使观测矩阵的基向量 $\boldsymbol{\Phi}$ 稀疏变换的变换基 $\boldsymbol{\Psi}$ 不相干。并且,Donoho 指出观测矩阵一定要服从一定类型一致分布的随机投影 UUP(Uniform Random Projection) 或者有限等距性质 RIP(Restricted Isometry Property)[5]。并且他指出高斯观测矩阵和贝努里观测矩阵是满足如上的条件的观测矩阵。第 3 个问题主要是通过凸优化的非线性恢复算法来完成。为了方便起见,不妨假设信号 $\boldsymbol{x}$ 已经是稀疏的,可以有下面的形式:

$$\min_{x} \| \boldsymbol{x} \|_1 \text{ sub to } \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \|_2^2 = 0 \tag{4}$$

可以理解为在 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的条件下,解出使解向量 $\boldsymbol{x}$ 中在 l_1 准则下的最小值,可以证明这个最小值也是在所有解中最稀疏的。解上面两个形式的方法主要有基追踪 (basis pursuit)[6], 匹配追踪 (matching pursuit)[7,8],内点法(interior－point method)[9],共轭梯度法(conjugate gradient)[10]及它们的改进算法。

4　仿真和分析

一维数据仿真:生成 1024 个数据,其中只有 10 个数值不为 0,其他全部为 0。这样生成的数据本身就是稀疏的。观测矩阵选用贝努里观测矩阵,恢复算法使用的是共轭梯度法(conjugate gradient)算法。仿真结果如图 3 所示。

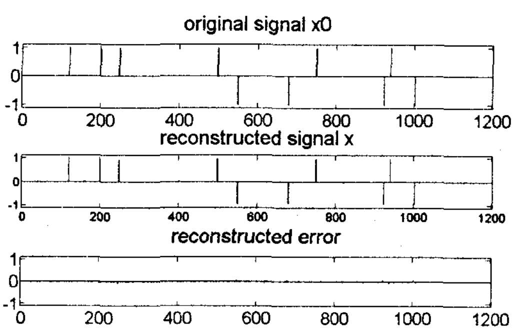


图 3　一维数据恢复

二维图像仿真:由于图像在时域时大多是不稀疏的,所以必须通过某种变换后使之稀疏。文中选用 MRI 图像,进行 DCT 变换使之稀疏。图 4 是 MRI 图像的 DCT 变换和通过压缩传感得到恢复值,可见这幅图像在 DCT 变换基下已经稀疏化了。图 5 给出的是恢复重建图像和原图像,图 6 给出通过比较恢复重建图像和原图像的误差值,可以看出运用压缩传感理论可以很好的恢复原图像。

5　结束语

对压缩传感理论进行简单的介绍,并且用压缩传感对一维和二维图像数据进行了重建。由仿真结果可

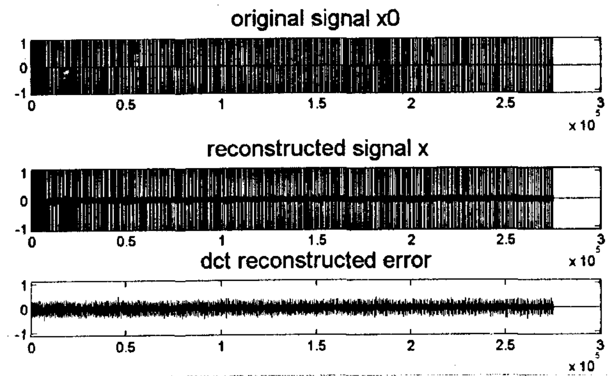


图 4　图像的 DCT 变换和 CS 重建的 DCT 值

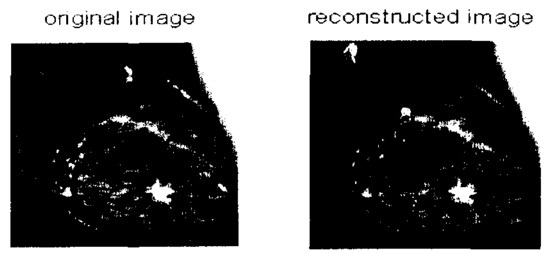


图 5　原图与重建的图像

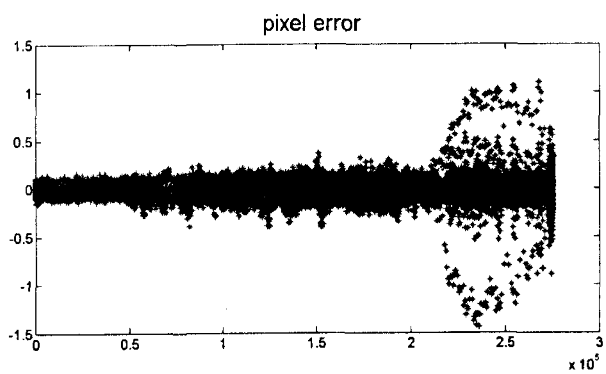


图 6　原图与重建图的误差

以看出重建的结果还是非常理想的。但是还有很多有待改进的地方,主要在如下几个方面:

(1)研究图像的稀疏基,即怎么构造这些基的问题,在图像稀疏分解的理论中已经有提出构造过完备原子库。

(2)UUP 或 RIP 条件只是观测矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所满足的充分条件,还没有一套完整的构造观测矩阵的理论,以构造更好的观测矩阵;

(3)稀疏度 k 与恢复信号、图像好坏的定量关系;

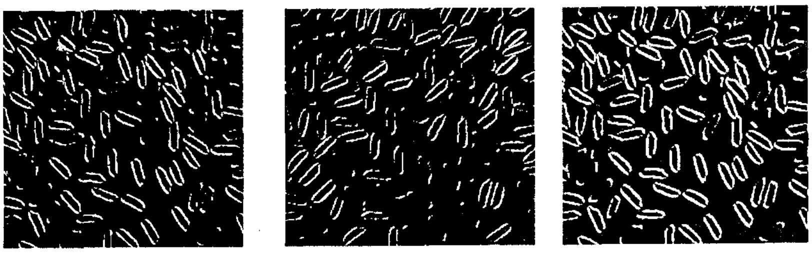
(4)重建算法的改进,现应用的重建算法大多是贪婪追踪算法和凸松弛法,其复杂度与观测数量密切相关,构造稳定的、计算复杂度较低的、对观测数量要求较小的重构算法是我们的目标。

参考文献:

[1]　Donoho D. Compressed sensing[J]. IEEE Trans. on Informa-

(下转第 29 页)

其中 $x_1, x_3, x_5 \leqslant 0, x_2, x_4, x_6 \geqslant 0$,即可以得到这 4 个方向上边缘融合的边缘图像,灵活性更高。



(a) Sobel 算子　(b) Prewitt 算子　(c) PSO 最优梯度算子

图 5 各算子提取斜 135°边缘的图像

4 结束语

粒子群算法自提出以来,在优化问题求解、电力系统、计算机和冶金自动化等领域表现出了较好的寻优性能,在寻优能力、计算速度和稳定性方面都超过了遗传算法、禁忌搜索算法和蚁群算法[9~11],因而引起了相关领域研究者的广泛关注。文中将粒子群优化算法引入寻找最优梯度算子来得到图像边缘。实验表明,可以根据不同的图像得到不同的最优梯度算子,在实际应用中有较强的适用能力,效果理想。

参考文献:

[1] How Z J, Wei G W. A new approach to edge detection[J]. Pattern Recognition,2002(35):1559 - 1570.

[2] Efford N. Digital Image Processing[M]. Reading, MA: Addison - Wesley,2000:164 - 173.

[3] Hou Zujun, Koh T S. Robust edge detection[J]. Pattern Recognition,2003(36):2083 - 2091.

[4] Gose E, Johnsonbaug R, Jost S. Pattern Recognition and Image Analysis[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall,1996: 208 - 210.

[5] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C] // Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. NJ: IEEE Service Center, 1995: 1942 - 1948.

[6] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[C] // Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science. Nagoya, Japan: [s. n.],1995:39 - 43.

[7] Ji Qiang, MHaralick R. Efficient facet edge detection and quantitative performance evaluation[J]. Pattern Recognition, 2002(35):689 - 700.

[8] Kim Dong - Su, Lee Wang - Heon, Kweon In - So. Automatic edge detection using 3 * 3ideal binary pixel patterns and fuzzy - based edge thresholding[J]. Pattern Recognition Letters, 2004(25):101 - 106.

[9] 徐小慧, 张 安. 基于粒子群优化算法的最佳熵阈值图像分割[J]. 计算机工程与应用, 2006,42(10):8 - 11.

[10] 马慧民, 叶春明, 张 爽. 二进制改进粒子群算法在背包问题中的应用[J]. 上海理工大学学报, 2006,28(1):31 - 34.

[11] 王 凌. 智能优化算法及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,2001.

(上接第 25 页)

tion Theory,2006,52(4):1289 - 1306.

[2] Laska J N, Kirolos S, Duarte M F, et al. Theory and implementation of an analog - to - information converter using Random Demodulation[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems, 2007,42(3):1959 - 1962.

[3] Candes E, Wakin M B. An Introduction to Compressive Sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 48(4): 21 - 30.

[4] Cormode G, Muthukrishnan S. Combinatorial Algorithms For Compressed Sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2006,46(3):198 - 201.

[5] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2006, 52 (2):489 - 509.

[6] Chen S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1):129 - 159.

[7] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2006, 52(2): 49 - 59.

[8] Tropp J A, Gilbert A. Signal Recovery from Partial Information by Orthogonal Matching Pursuit[EB/OL]. 2005 - 04. www - personal. umich. edu/~jtropp/papers/TG05 - Signal - Recovery. pdf.

[9] Kim Seung - Jean, Koh K, Lustig M, et al. An Interior - Point Method for Large - Scale - Regularized Least Squares[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Singnal Processing, 2007, 4 (1):606 - 617.

[10] Figueiredo M A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. Journal of Selected Topics in Signal Processing: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing, 2007, 1(4):586 - 598.