

# 基于提升小波结合 DCT 变换的图像去噪研究

周先国, 李开宇

(南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016)

**摘要:**提出了一种通过提升小波变换结合 DCT 变换的去噪新方法。该算法不依赖于对噪声方差进行估计, 直接利用 DCT 变换对高频各个子带进行局部特征提取, 从而估计噪声能量的估计阈值。实验显示, 与传统的软、硬阈值去噪算法相比, 该算法不仅提高了图像的信噪比, 保留了更多的边缘细节, 而且处理时间也将近提高一倍, 更具有实用价值。

**关键词:**图像去噪; 提升小波; DCT

**中图分类号:** TN911.73

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2009)02-0062-04

## Image De-noising Research Based on Lifting Wavelet and Discrete Cosine Transform

ZHOU Xian-guo, LI Kai-yu

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** Proposes a new method to perform image de-noising based on lifting wavelet transform and discrete cosine transform(DCT). Instead of many algorithms rely on accurate estimation of noise variance, this algorithm estimates noise energy through DCT which extracts local feature. Experimental results demonstrate that the proposed method not only achieve better PSNR and retain more edge detail information, but also the process time raises to almost twice as before, it is indeed a good method.

**Key words:** image de-noising; lifting wavelet; DCT

### 0 引言

近年来,小波理论迅速发展,由于其具备良好的时频特性和多分辨率特性,小波降噪被广泛地应用在各种降噪处理中<sup>[1,2]</sup>。Mallat 提出了基于小波模极大值去噪法<sup>[3]</sup>; Xu 等人提出了尺度相关性去噪法<sup>[4]</sup>,而 1995 年,Donoho 和 John stone 提出了小波阈值萎缩方法<sup>[5]</sup>,包括硬阈值和软阈值去噪方法,并且给出了  $\delta = \sigma \sqrt{2\ln(N)}$  的阈值,在渐近意义上证明了其阈值的最优性<sup>[1]</sup>,但是 Coifman 和 Donoho 已指出,这种方法处理后信号会出现边缘模糊和伪 Gibbs 等现象。针对这个问题,众多学者提出了改进措施<sup>[6~9]</sup>,一定程度上改善了上述现象,然而始终都脱离不掉对噪声方差先进行估计,对其进行精确的估计是相当困难的,目前比较常用的是中位数估计法。

针对小波域中信号和噪声在小波系数的数量和幅

值上反映出不同的特点,文中提出了一种通过提升小波变换结合 DCT 变换的去噪新方法,直接从小波系数的统计特征进行考虑,利用 DCT 变换对高频各子带进行局部特征提取,从而估计噪声能量的估计阈值,该算法不依赖于对噪声方差的估计,更具有实用价值。

### 1 提升小波变换原理

1995 年,Sweldens 提出了一种新的构造紧支集双正交小波的方法——提升变换,称之为第二代小波。Daubechies 和 Sweldens 将传统小波变换分解为提升形式来实现,并对每一步提升所产生的浮点数进行取整处理,构造出可逆的整数小波变换。提升变换的基本思想是将 Mallat 算法的每一级滤波运算分解为分裂(split)、预测(predict)、更新(update)三个步骤,而且每一步都是可逆的。重构过程类似于分解过程,基于取消更新、取消预测、合并三步运算。图 1 给出了提升小波分解和重构的具体过程,图中  $P$  为预测算子,  $U$  为更新算子。提升小波分解的各个过程如式(1)、(2)、(3)所示。

$$\{\text{even}_{j-1}, \text{odd}_{j-1}\} = \text{Split}(c_j) \quad (1)$$

收稿日期:2008-06-07

基金项目:国防预研项目;航空科学基金(04D52032)

作者简介:周先国(1983-),男,硕士研究生,研究方向为数字信号处理、数字图像处理及数据采集;李开宇,博士,副教授,研究方向为数字信号处理、数字图像处理、数据采集、传感器技术。

$$d_{j-1} = \text{odd}_{j-1} - P(\text{even}_{j-1}) \quad (2)$$

$$c_{j-1} = \text{even}_{j-1} + U(\text{odd}_{j-1}) \quad (3)$$

上面各式中,  $\text{even}_{j-1} = c_j(2n)$ ,  $\text{odd}_{j-1} = c_j(2n+1)$ ,  $n \in N$ 。

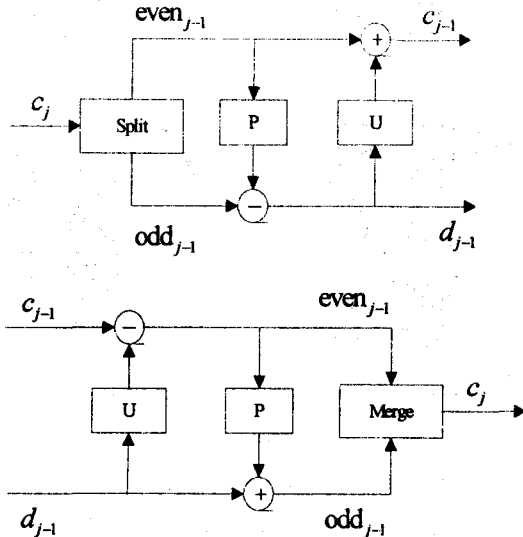


图1 提升小波分解和重构的具体过程

其中分裂是将输入信号( $c_j$ )根据其序数奇偶性分成偶数序列( $\text{even}_{j-1}$ )和奇数序列( $\text{odd}_{j-1}$ ),然后进行对偶提升,即用偶数序列来预测( $P$ )奇数序列,把产生的误差作为高通小波系数( $d_{j-1}$ );最后是原始提升,即用高通小波系数来更新( $U$ )偶数序列作为低通尺度函数系数( $c_{j-1}$ )。从提升小波变换的实现过程来看,提升变换较传统的 Mallat 小波变换具有以下几方面优点:1) 算法复杂度低,运算速度快,在复杂度相近的情况下,提升小波变换的运算量减少一半;2) 能够实现原位运算,对内存需求量小,便于 DSP 芯片实现。

## 2 提升小波域结合 DCT 去噪原理

图像噪声从统计理论观点可以分为平稳和非平稳噪声两种,由于大多数情况下图像中的噪声都可以近似为高斯分布,而从小波变换的特性可知,高斯分布的噪声仍然是高斯分布,它均匀分布在频率尺度空间的各个部分,而信号由于其带限性,经过小波变换后仅仅集中在尺度空间的有限部分,这样从信号能量的观点来看,信号只对一小部分小波系数有贡献。而噪声对所有小波系数都有贡献,也就是噪声的能量分布在所有小波系数上,因而,在高频小波各个子带中,包含了两部分小波系数,细节和噪声信号叠加形成,如果能估计出噪声引起的小波域系数,那么就能实现图像的去噪,而在小波域各个高频子带中,细节和噪声引起的小波系数占主导地位,是其主要特征,因此可以通过统计特征正确估计出此类小波系数的幅值。

主能量分析(Principal Component Analysis, PCA)是近年来在图像分析和模式识别领域研究较多的一种统计学特征提取方法,也称 K-L 变换,但 K-L 变换是通过向量的协方差矩阵进行特征值分解来得到正交变换矩阵,但 K-L 变换不存在快速算法,计算量大,不适合应用于尺寸较大的图像去噪处理。

对于一个  $N \times 1$  的 Markov 序列,其协方差矩阵具有如式(4)形式:

$$C_X = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{N-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{N-1} & \rho^{N-2} & \rho^{N-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $[c_x]_{ij} = \rho^{|i-j|}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ 。

而  $C_X$  的特征值和特征向量为:

$$\lambda_i = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\omega_j) + \rho^2}$$

$$v_{ij} = \sqrt{\frac{2}{N + \lambda_i}} \sin\left\{\omega_j\left[(i+1) - \frac{N+1}{2}\right] + (j+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

式中,  $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ 。

而  $\omega_j$  是式(5)超越方程的根。

$$\tan(N\omega) = -\frac{(1 - \rho^2)\sin(\omega)}{\cos(\omega) - 2\rho + \rho^2\cos(\omega)} \quad (5)$$

当  $\rho$  趋向于 1 时,

$$v_{i,0} = \frac{1}{N} \quad (6)$$

$$v_{i,j} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left[\frac{(i+1/2)j\pi}{N} + \frac{\pi}{2}\right] = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \cos\frac{\pi(2i+1)j}{2N} \quad (7)$$

式(6)和式(7)此时即为 DCT 变换。对于自然景物,通常有  $\rho \approx 1$ ,这时 DCT 的基向量可以很好地近似 K-L 变换的基向量。一维 DCT 的这一特性可以推广到二维图像,在对图像进行小波分解后,由于小波的去相关作用,高频子带的小波系数并不满足 Markov 序列的条件,但其绝对值是相关的,这样,就可以通过对高频小波系数取绝对值后进行 DCT 变换,由于高频子块系数绝大部分是由噪声引起的,经过 DCT 变换后用少部分幅值比较大的 DCT 系数进行重构高频系数,来获取原先信号的幅值特征,这样,就可以避免对噪声方差进行估计。

## 3 提升小波 DCT 图像去噪的实现

为了更细致地分析提升小波域中各系数的局部特征,同时为了加快 DCT 特征提取的速度,将每个高频子带分成  $k \times k$  的区域  $W$ ,根据高频分块子块  $W$  的大小,取得相应的 DCT 变换向量  $T$ ,对子块  $W$  内的小波

系数的绝对值作二维 DCT 变换,则有

$$D = T \cdot |W| \cdot T^T \quad (8)$$

式(8)中,  $T^T$  表示  $T$  的转置。

在变换的 DCT 域中,取其中  $P$  个幅值最大的 DCT 系数,而将其余的  $L$  个系数 DCT 系数置零,得到反映主分量系数  $\hat{D}$ ,对该子块进行 DCT 反变换,实现原小波系数的重建。

$$\hat{W} = T^T \cdot \hat{D} \cdot T \quad (9)$$

$\hat{W}$  反映了由噪声引起的小波系数的幅值特征,其均值式(10)可以做为子块内噪声引起小波系数幅值的估计<sup>[10]</sup>。

$$\hat{\lambda} = \text{mean}(\hat{W}) \quad (10)$$

提升小波结合 DCT 图像去噪的实现流程如图 2 所示。

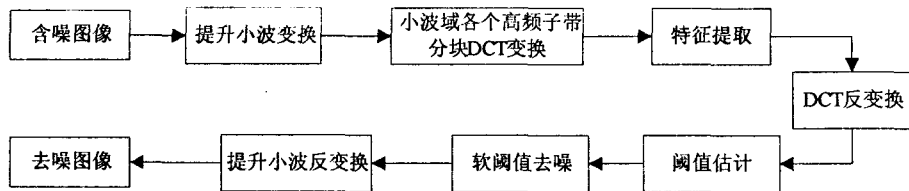


图 2 文中算法去噪实现图

其中,软阈值函数如式(11)所示:

$$W_{i,j} = \begin{cases} \text{sign}(w_{i,j})(|w_{i,j}| - \lambda) & |w_{i,j}| \geq \lambda \\ 0 & |w_{i,j}| < \lambda \end{cases} \quad (11)$$

#### 4 仿真与分析

为了验证文中算法的有效性,选择纹理比较丰富的 256×256 的 woman 图像作为实验对象。采用峰值信噪比 (PSNR) 和处理时间  $t$  作为评价指标,其中 PSNR 定义如式(12):

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{I_{\max}^2}{\frac{1}{MN} \sum_{(i,j)} (I_{ij} - Z_{ij})^2} \quad (12)$$

式中,  $0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1$ 。

式(12)中,  $I_{ij}$  为原始图像  $I$  在  $(i, j)$  位置像素的灰度值;  $Z_{ij}$  表示经过去噪后的图像矩阵。

实验基于 matlab7.1,对含噪图像进行 3 层 CDF97 提升小波变换<sup>[11]</sup>,分解子块为 16×16,DCT 域保留 36 个幅值最大的数,所加噪声为零均值高斯噪,噪声标准差为  $\sigma$ 。图 3 分别显示了文中算法和各算法在  $\sigma = 10$  时的结果显示图,图 4 是文中算法和主能量分析法在  $\sigma$

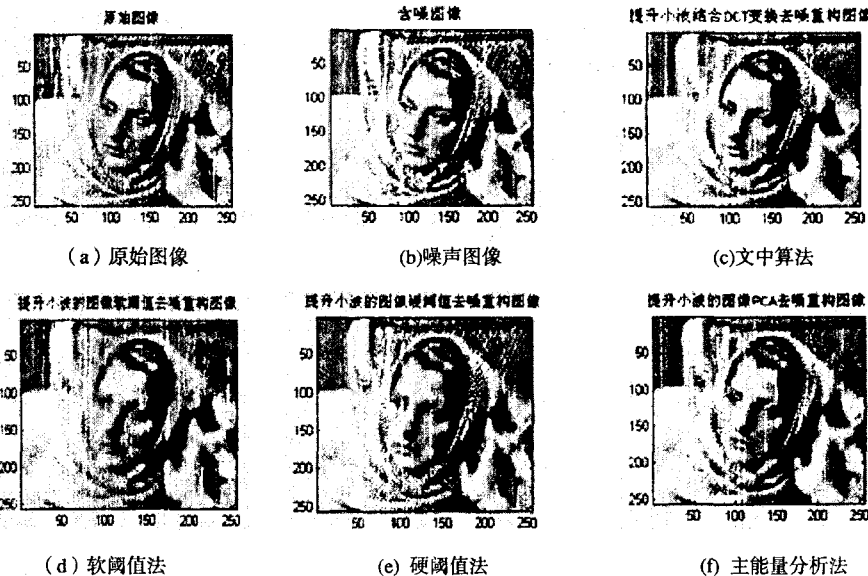
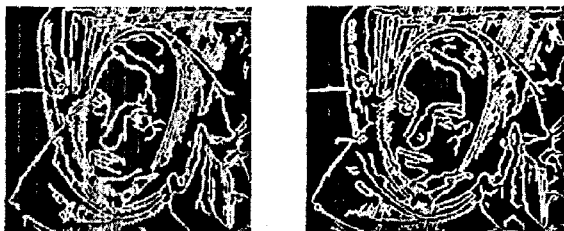


图 3  $\sigma = 10$  的 woman 图像各算法去噪比较图

$= 10$  去噪结果图经过 canny 算子得出的边缘检测图。表 1 是文中算法和其他算法结合 CDF97 提升小波变换在  $\sigma$  取不同值时的比较,表 2 是文中算法分别结合 CDF97 提升小波变换与传统小波变换的 PSNR 和时间  $t$  比较。从实验中可以得出如下结论:

(1)文中算法其峰值信噪比比各算法处理要来的高,很好克服了传统硬阈值处理方法使图像出现的振铃和伪吉布斯效应和软阈值处理所带来的图像边缘模糊等视觉失真现象,保留了图像的细节信息。

(2)文中算法与主能量分析法虽然两者都是通过特征提取进行阈值估计,但主能量分析法不存在快速算法,从图 4 可以看出,文中算法在 woman 图像的眉毛、围巾、手部、鼻子、头发等轮廓细节信息上保留的更多。



(a) 主能量分析法后的边缘检测图 (b) 文中算法后的边缘检测图

图 4 文中算法和主能量分析法  
经边缘检测后的对比图

(3)从表 2 可以看出文中算法通过引进提升小波变换,避免了传统小波变换的复杂的卷积运算,从而使处理时间将近提高了一倍。

表 1 文中算法和其他算法在取不同值时的比较

噪声标准差	PSNR(dB)							文中算法
	软阈值法	硬阈值法	软硬折衷法 <sup>[8]</sup>	模平方阈值法 <sup>[9]</sup>	尺度相关法 <sup>[4]</sup>	ENS法 <sup>[7]</sup>	PCA法 <sup>[10]</sup>	
10	22.2829	24.5054	23.9879	24.2307	24.3426	22.6896	23.4820	24.6884
20	21.3636	22.0245	22.3514	22.6754	21.9901	22.1122	22.7218	23.3174
30	20.4338	19.5824	20.5027	20.8775	19.4459	21.3667	21.7062	21.7577

表 2 文中算法分别结合提升小波变换与  
传统小波变换的比较

噪声标准差	PSNR(dB)		T(s)	
	W-文中算法	L-文中算法	W-文中算法	L-文中算法
10	24.6301	24.6884	2.85901	1.43702
20	23.2724	23.3174	3.08919	1.46612
30	21.7290	21.7577	3.13723	1.47379

上述传统去噪方法中的阈值估计采用  $\lambda(j) = \sigma_j + \sqrt{2\log(N)/\log(j+1)}$ , 其中  $\sigma$  是根据中位法估计得到的噪声方差,  $N$  为各个高频子图的大小,  $j$  为分解尺度大小, 文中统一选择 3 层尺度分解。

5 结束语

提出了一种通过提升小波结合 DCT 变换的去噪新方法, 实验表明, 该算法很好地去除了高斯白噪声, 更多程度地保留了图像的细节信息, 该算法不依赖于对噪声方差进行估计, 直接利用 DCT 变换对高频各子带进行局部特征提取, 从而估计噪声能量的估计阈值, 而提升小波是一种空间域的小波构造方法, 适合硬件实现, 所以文中算法更具有实用价值。

参考文献:

[1] Dono D L. De-noising by soft thresholding[J]. IEEE Transactions on information theory, 1995, 41(3):613-627.

[2] 谢杰成, 张大力, 徐文立. 小波图像去噪综述[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7(3):209-217.

[3] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. IEEE Transaction on IT, 1992, 38(2):617-643.

[4] Xu Y, Weaver B, Healy D M. Wavelet transform domain filters: a spatially selective filtration technique[J]. IEEE transaction on Image Processing, 1994, 3(6):217-237.

[5] Donoho D L, Johnstone I M. Wavelet shrinkage asymptopia [J]. Journal of Royal Statistical Society, 1995, 57(2):301-369.

[6] Gao. Wavelet Shrinkage denoising using the non-negative-arrote[J]. Jcomput Graph Statist, 1998, 7(4):469-488.

[7] 傅彩霞, 杨光. 一种新的具有增强效果的小波域图像去噪方法[J]. 中国图象图形学报, 2007, 12(1):51-55.

[8] 王亚, 吕新华, 王海峰. 一种改进的小波阈值降噪方法及其 Matlab 实现[J]. 微计算机信息, 2006, 22(3):259-261.

[9] 潘显兵. 一种改进的小波阈值降噪性能分析[J]. 微计算机信息(测控自动化), 2006, 22(7):112-113.

[10] 芮挺, 王金岩, 沈春林, 等. 基于 PCA 的图像小波去噪方法[J]. 小型微型计算机系统, 2006, 27(1):158-161.

[11] Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. J. Fourier - Annal. Appl, 1998, 4(3):245-267.

(上接第 61 页)

IEEE Trans on Neural Network, 2005, 16(3):645-678.

[2] Berkhin P. Survey of clustering data mining techniques[R]. San Jose, CA:[s. n.], 2002.

[3] 周傲英, 钱卫宁. 从多角度分析现有聚类算法[J]. 软件学报, 2002, 13(8):1382-1394.

[4] Jain A K, Dubes R C. Algorithms for clustering data[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1998:89-131.

[5] Hartigan J, Wong M. Algorithm AS136: A k-means clustering algorithm[J]. Applied Statistics, 1979(28):100-108.

[6] Kaufman L, Rousseeuw P J. Finding Groups in Data: an Introduction to Cluster Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.

[7] Ng R, Han J. CLARANS: A method for clustering objects for spatial data mining[J]. IEEE Trans on Knowl, Data Eng., 2002, 14(5):1003-1016.

[8] Babu G P, Murty M N. Simulated annealing for selecting optimal initial seeds in the K-means algorithm[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 1994, 25(1-2):85-94.

[9] Wang Wei, Yang Jiong, Muntz R. STING: A statistical infor-

mation grid approach to spatial data mining[C]//In Proceeding of the 23rd VLDB Conference. Athens, Greece:[s. n.], 1997:186-195.

[10] Yager R, Filev D. Approximate clustering via the mountain method[J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 1994, 24(8):1279-1284.

[11] Araujo E O. A heuristic adjustment to the calculation of the dissimilarity in the FCM algorithm [C]//IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Joint 9th. Vancouver, BC, Canada:[s. n.], 2001:25-30.

[12] Kersten P. Implementation issues in the fuzzy c-medians clustering algorithm [C]//In Proc. 6th IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems. Barcelona, Spain:[s. n.], 1997:957-962.

[13] Coy S P, Golden B L, Runger G C, et al. See the Forest Before the Trees: Fine-Tuned Learning and Its Application to the Traveling Salesman Problem[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1998, 28(4):454-464.

[14] Charon I, Hudry O. The noising method: A new method for combinatorial optimization[J]. Oper. Res. Lett., 1993, 14(3):133-137.