

# 序贯 Monte Carlo 算法仿真结果分析

张孝生

(青岛大地工程造价咨询有限公司, 山东 青岛 266071)

**摘 要:**序贯 Monte Carlo 方法能够解决很多实际问题。它的系统模型与 Kalman 滤波算法相比具有更广泛的适用性,所以研究 Monte Carlo 方法是很有实际意义的。文中对序贯 Monte Carlo 算法进行性能分析,对这一方法的跟踪能力进行了仿真实验。采用的仿真系统模型是非线性系统模型。仿真实验比较了 EKF、SIS、SIR 算法的性能。通过对不同算法的仿真结果之间的分析和比较,得出了有意义的结论。这对一些工程问题的解决是有重要意义的。

**关键词:**Monte Carlo;序贯 Monte Carlo;扩展 Kalman 滤波;仿真分析

**中图分类号:**TN911.7

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2009)02-0055-03

## Simulation Results Analysis of Sequential Monte Carlo Algorithm

ZHANG Xiao-sheng

(Qingdao Dadi Engineering Consulting Firm, Qingdao 266071, China)

**Abstract:** The sequential Monte Carlo algorithm is very important for solving many practical problems. It can solve the parameter estimation problem for a more general system model. Hence, it is interesting and significant to study Monte Carlo. The main objective of this paper is to analyze the performance of the Monte Carlo algorithm by simulation results. Simultaneously, compare the Monte Carlo algorithm with the extended Kalman filter. In the simulation, the performances of the EKF, SIS and the SIR algorithms are compared. Some meaningful results are concluded from the simulation, which are useful for solving the practical problems.

**Key words:** Monte Carlo; sequential Monte Carlo; extended Kalman filtering; simulation analysis

### 0 引言

Monte Carlo 方法因为具有很好的适用性,现在正引起越来越多的研究者的兴趣<sup>[1~3]</sup>。与 Kalman 滤波算法相比, Monte Carlo 方法能够解决更广泛的一类问题,它可以解决非线性、非高斯系统模型的参数估计问题<sup>[1,2]</sup>。Monte Carlo 算法在语音信号处理<sup>[4]</sup>、故障诊断<sup>[5]</sup>、通信信号处理<sup>[6]</sup>以及目标跟踪<sup>[7,8]</sup>等诸多领域都可以灵活地应用来解决实际问题。

Monte Carlo 方法如此重要,分析它的性能是很有意义的。文中通过仿真实验验证序贯 Monte Carlo 算法的性能,并对几种相关算法进行比较和分析。希望对应用和研究 Monte Carlo 算法有指导意义。

### 1 序贯 Monte Carlo 系统模型

序贯 Monte Carlo 算法适用的系统模型是非线性的。其状态方程和观测方程分别为:

$$x_k = f_k(x_{k-1}, v_{k-1}) \quad (1)$$

$$z_k = h_k(x_k, n_k) \quad (2)$$

其中,  $f_k$  是一非线性函数,  $\{v_{k-1}, k \in N\}$  是独立同分布过程噪声序列。所以这一状态方程是由过程噪声  $\{v_{k-1}, k \in N\}$  驱动的一阶 Markov 过程,具有已知的转移概率函数;  $h_k$  通常也是非线性函数,  $\{n_k, k \in N\}$  是独立同分布观测噪声序列。

序贯 Monte Carlo 其实就是 Particle Filtering 的方法,即粒子滤波器。算法详细的推导步骤在参考文献[1]中,这里就不再赘述。这里概括这一算法的原理: Particle Filtering 算法是一种迭代算法,即下一时刻的值由前一时刻的值递推得到,是一种递推 Bayesian 估计,因此算法存储量减小。采用的算法是序贯 Monte Carlo 方法。其基本思想是:用一组随机样本连同与之相对应的权重值来表示真实的后验概率密度函数,从而用这一组加权的随机样本来估计真实的状态值。

### 2 序贯 Monte Carlo 算法的仿真实现

仍用文献[1]中给的例子,系统的状态方程和观测方程为:

收稿日期:2008-06-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60704023)

作者简介:张孝生(1976-),男,山东人,工程师,研究方向为智能信息处理、智能控制。

$$x_k = f_k(x_{k-1}, k) + v_{k-1} \quad (3)$$

$$z_k = \frac{x_k^2}{20} + n_k \quad (4)$$

其中,  $f_k(x_{k-1}, k) = \frac{x_k - 1}{2} + \frac{25x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8\cos(1.2k)$ ,  $v_{k-1}$  和  $n_k$  分别是零均值, 方差分别为  $Q_{k-1}$  和  $R_k$  的高斯随机变量, 程序中令方差分别为 10 和 1。

已知

$$p(x_k | x_{k-1}) = N(x_k; f_k(x_{k-1}, k), Q_{k-1}) \quad (5)$$

$$p(z_k | x_k) = N(z_k; \frac{x_k^2}{20}, R_k) \quad (6)$$

采用 SIR(Sampling importance resampling) Particle Filter 算法, 即文献[1]中算法 4。这个算法比 SIS(Sequential Importance Sampling)算法性能优越, 因为 SIR 算法包含了重采样。后面将会通过实验结果分析表明如果没有重采样, 算法性能将大大降低, 误差增大, 而且鲁棒性也不好。

带有重采样的 Monte Carlo 算法的编程步骤:

步骤 1 根据系统模型计算状态的理论真值  $x = [x(1), x(2), \dots, x(N)]$ ;

步骤 2 根据已知概率转移公式产生一组随机变量, 并计算每个随机变量的权重。由此计算每个时刻状态的估计值;

步骤 3 重采样;

步骤 4 用重采样后得到的新的权重值和样本值更新估计值。

### 3 算法性能分析

为了对算法性能进行更好的比较和分析, 仿真中对各算法的程序都进行了多次独立实验。仿真实验 1 为 EKF(Extended Kalman Filter)算法, 仿真实例 2 为 SIS 算法, 仿真实验 3 为 SIR 算法。各个算法从性能上分析还是有很大不同的。

应该指出的是, 这些算法都是次优算法。最优的算法是 Kalman 滤波算法, 它在最小均方误差准则意义下是最优的。但 Kalman 滤波算法有其局限性, 即它通常只适合解决线性、高斯模型。但 Particle Filter 能够解决任何非线性、非高斯模型问题。虽然理论上是次优算法, 但通过大量的仿真实验验证了这些算法的有效性。而且在解决非线性、非高斯系统问题时, 这些算法比 EKF 算法还要有效。仿真结果验证了这一点。

为了说明 Particle Filtering 的算法的有效性和普遍适用性, 作了多次独立的仿真实验。并对 EKF、Particle Filtering 算法中的 SIS 和 SIR 算法进行了结果分析和性能比较。通过仿真验证了加入重采样之后的序

贯 Monte Carlo 算法的性能要比没有重采样的算法性能更好。

图 1 是 EKF 的仿真结果。这一仿真图显示了 EKF 算法应用于非线性系统模型(3)、(4)得到的状态估计值与真实值之间的关系曲线图。

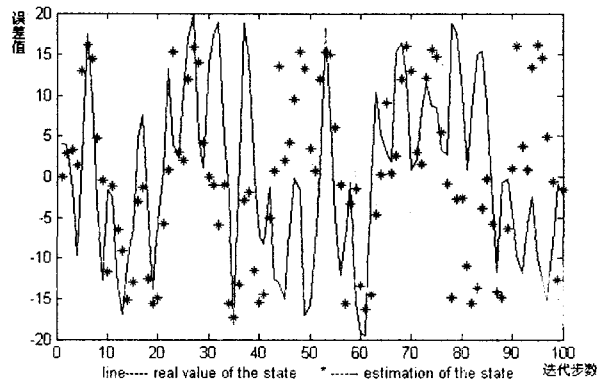


图 1 EKF 算法的仿真结果图

图中实线表示由系统方程得到的状态的真实值, \* 表示由该递推算法得到的状态的估计值。

图 2 是 SIS 的仿真效果图。这个仿真结果图体现了将 SIS 算法应用于非线性系统模型得到的状态估计值与真实值之间的关系曲线图。

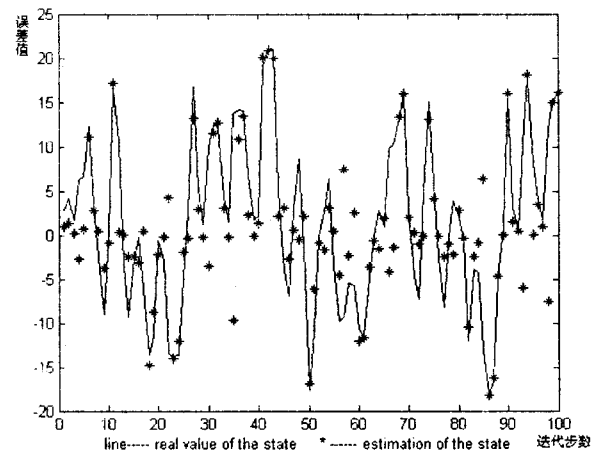


图 2 SIS 的状态估计结果图

图中, 实线表示由系统方程得到的状态的真实值, \* 表示由该递推算法得到的状态的估计值。

图 3 是带有重采样的 SIR 的仿真结果图。

图中, 实线表示由系统方程得到的状态的真实值, \* 表示由该递推算法得到的状态的估计值。

图 4 是三种算法的状态估计误差效果图。这是在独立运行 100 次之后得到的统计结果。

图中, 实线表示 EKF 算法的估计误差, \* 表示由 SIS 算法得到的估计误差, + 表示由 SIR 算法得到的估计误差。

比较图 3 和图 4 得, SIS 算法没有进行重采样, 所以得到的误差比较大。而 SIR 算法因为加入了重采

样,估计效果得到明显改善。从以上的仿真结果,可以看到 Monte Carlo 方法的有效性。尤其是在改善估计性能方面,可以考虑加入重采样,以剔除权重比较小的样本,多保留权重大的样本,这样估计值会更为逼近真实值。

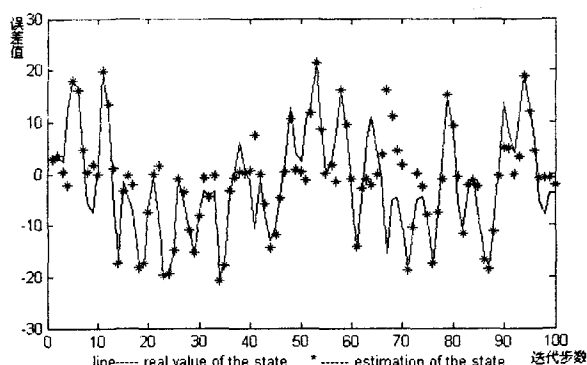


图3 SIR 的状态仿真效果图

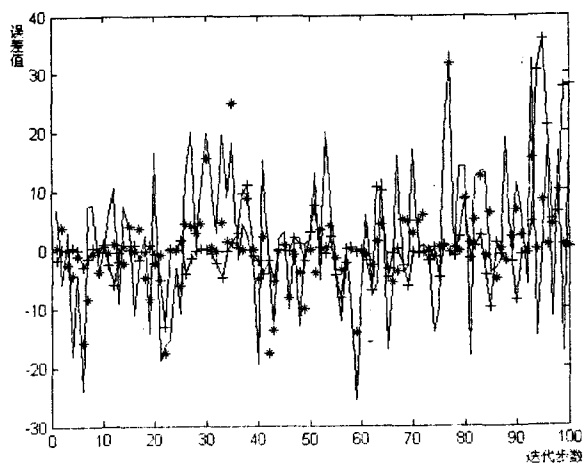


图4 状态估计误差效果图

从图4所显示的三种算法的误差曲线图可以看出,SIR算法要优于SIS算法,SIS算法优于EKF算法。因此,在解决非线性、非高斯模型问题时,序贯 Monte Carlo 方法显出了其广泛的适用性和很好的估计准确性。

## 4 结束语

文中的主要工作是通过大量的计算机仿真实验来分析 EKF、SIS 和 SIR 三种算法的性能,同时对这三种算法的特点进行比较。实验结果表明,因为加入了重采样,SIR 算法要比 SIS 算法的性能更好。仿真结果

表明, Monte Carlo 方法比 EKF 的性能更好。现在 Monte Carlo 方法已广泛应用于信号处理的许多领域,例如数字通信领域<sup>[3]</sup>,文献[3]采用了一种 MCMC 即基于 Markov Chain 的 Monte Carlo 方法;还有在语音信号处理方面的应用<sup>[4]</sup>。但这几篇文献中都没有对算法的性能进行理论的分析,没有分析误差的范围以及有没有下界等。大多都是从大量的仿真实验进行统计性能的分析。笔者在实验过程中也没有能够进行算法性能的理论分析。但从大量的程序运行来分析,其统计性能还是可以的,比较稳定。因此,对该算法的理论和应用都还值得进行深入研究,因为它较一般的 Kalman 滤波算法适用的范围广,那些非线性、非高斯模型用该算法都能求解。

文中的创新点:

- 1)对 EKF 和序贯 Monte Carlo 方法进行仿真验证,并对 EKF、SIS 和 SIR 三种算法的估计性能进行分析和比较。
- 2)通过仿真验证得到了一些有意义的结论,这对从事非线性、非高斯系统的参数估计问题的研究是有指导意义的。

## 参考文献:

- [1] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non - Gaussian bayesian tracking[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2002, 50(2): 174 - 188.
- [2] Djuric P M, Kotecha J H, Zhang J Q. Particle filtering, IEEE Signal Processing, Magazine, 2003(9):1053 - 5888.
- [3] 张卫明, 张炎华, 钟山. 蒙特卡罗粒子滤波算法应用研究[J]. 微计算机信息, 2007(1):295 - 297.
- [4] Rabiner L R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition[J]. Proceedings of IEEE, 1989, 77(2):257 - 286.
- [5] 莫以为, 萧德云. 基于进化粒子滤波器的混合系统故障诊断[J]. 控制与决策, 2004, 19(6):611 - 615.
- [6] 冯 燮, 吴乐南, 廖桂生. 一种新的基于序列蒙特卡罗方法的符号检测器[J]. 电波科学学报, 2005, 3:132 - 135.
- [7] 江宝安, 卢焕章. 粒子滤波器及其在目标跟踪中的应用[J]. 雷达科学与技术, 2003, 1(3):44 - 48.
- [8] 邓小龙, 谢剑英, 倪宏伟. 一个用于目标跟踪的改进粒子滤波算法[J]. 中国航空学报(英文版), 2005, 2:166 - 170.
- [8] Ioanna - Ourania S, George A. Tsihrantzis: An improved neural - network - based face detection and facial expression classification system[J]. SMC, 2004(1):666 - 671.
- [9] 冯元戢, 施鹏飞. 基于支持向量机的彩色图像人脸检测方法[J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(6):947 - 950.

(上接第 54 页)

国科学技术大学, 2003.

- [7] Han C C, Mark Liao H Y. Fast face detection via morphology - based pre - processing[J]. Patter Recognition, 2000, 33(10):1701 - 1712.