

基于双射函数 $f: N^4 \rightarrow N$ 的可计算性研究

许精明

(安徽工业大学 计算机学院, 安徽 马鞍山 243002)

摘 要: 对四重笛卡尔积双射函数 $f: N^4 \rightarrow N$ 计算过程进行了研究, 分析了其内在启发式构造规律, 导出了 $f: N^4 \rightarrow N$ 的显式计算式。运用的启发规则是, 将 N^4 集合中前三个元素和相等的四元组划归为同一类, 并按顺序将各类连续排列, 再用交替枚举访问的方式对 N^4 中的各四元组进行访问, 逐级构造出 $f: N^4 \rightarrow N$ 的显式计算式。并将该式整理为只含有加法和乘法的运算形式。进一步分析得: n 重函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的时间复杂度是指数增长的, 即 $O(c^n)$, $c \in N$ 。对函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的计算属 NP 难问题。

关键词: 计算理论; 双射函数; 高重笛卡尔积; 可数无穷集合; NP 难

中图分类号: TP301

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2009)01-0100-03

Research on Computability Based on Bijection Function $f: N^4 \rightarrow N$

XU Jing-ming

(Institute of Computer, Anhui University of Technology, Maanshan 243002, China)

Abstract: The process of computation for four-fold Cartesian product bijection function $f: N^4 \rightarrow N$ is researched in this paper and the heuristic rules of the function are analyzed. A formula of the function $f: N^4 \rightarrow N$ is deduced. The heuristic rules are that if the sum of pre-three elements of 4-ary relation of N^4 is equal, they are put in one class regularly, and all classes are formed successively, then visit all elements of N alternately. The formula of function $f: N^4 \rightarrow N$ is simplified as simply as possible only containing addition and multiplication operations. Further analysis appears that the time complexity of function $f: N^n \rightarrow N$ is $O(c^n)$, $c \in N$, the computing to $f: N^n \rightarrow N$ is an NP hard problem.

Key words: computation theory; bijection function; high-fold Cartesian product; countably infinite set; NP hard

0 引言

可计算性和计算复杂度是计算理论研究的主要内容之一。计算理论中的一些基本问题, 例如, NP 难问题的时间界限、SAT 可满足性等问题^[1-3], 一直在人们的不断研究和探索之中。函数的可计算性也是可计算性研究的分支之一。

在集合论中, 双射函数 $f: A \rightarrow B$ 是指集合 A 到集合 B 的关系是一一对应的^[4], 且是满射的。如果集合 A 与自然数集合 N 之间是双射的, 那么集合 A 是可数无穷的。已知可数无穷个可数无穷集合的并是可数无穷的^[5], 但在具体计算式的构造上, 没有 $n \geq 4$ 的高重笛卡尔积函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的显式计算式。文献^[5, 6]中给出了二重笛卡尔积函数 $f: N^2 \rightarrow N$ 的计算式:

$$f(i, j) = \frac{1}{2}[(i+j)^2 + 3i + j]$$

文献^[7]中构造了函数 $f: N^3 \rightarrow N$ 的计算式:

$$f(i, j, k) = \frac{1}{6}[(i+j+k)^3 + 3(i+j+k)^2 + 3(i+j)^2 + 11i + 5j + 2k]$$

文中通过对四重笛卡尔积函数 $f: N^4 \rightarrow N$ 的研究, 分析了其构造过程及其内在特征规律。运用逐级递推的方法构造了 $f: N^4 \rightarrow N$ 的显式计算式, 并进一步探讨了 n 重笛卡尔积函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的可计算性。

1 对集合 N^4 中各元素访问次序的排列

集合 N^4 是由图 1 中全部集合的并组成的。对图 1 中的所有集合按图 2 所示进行分类, 分类的规则是: 每类中四元组的前三个元素的和相等, 分别为 0、1、2、...

图 3 是将图 2 中的所有类进行连续排列, 其中右边每个四元组上面标注的数字为该四元组被访问的次序, 箭头为访问的走向。

收稿日期: 2008-05-13

基金项目: 安徽省自然科学基金项目(KJ2007B245)

作者简介: 许精明(1963-), 男, 安徽人, 副教授, 研究方向为理论计算机科学和人工智能等。

$\{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times N$	$\{0\} \times \{0\} \times \{1\} \times N$	$\{0\} \times \{0\} \times \{2\} \times N$...
$\{0\} \times \{1\} \times \{0\} \times N$	$\{0\} \times \{1\} \times \{1\} \times N$	$\{0\} \times \{1\} \times \{2\} \times N$...
$\{0\} \times \{2\} \times \{0\} \times N$	$\{0\} \times \{2\} \times \{1\} \times N$	$\{0\} \times \{2\} \times \{2\} \times N$...
⋮	⋮	⋮	⋮
$\{1\} \times \{0\} \times \{0\} \times N$	$\{1\} \times \{0\} \times \{1\} \times N$	$\{1\} \times \{0\} \times \{2\} \times N$...
$\{1\} \times \{1\} \times \{0\} \times N$	$\{1\} \times \{1\} \times \{1\} \times N$	$\{1\} \times \{1\} \times \{2\} \times N$...
$\{1\} \times \{2\} \times \{0\} \times N$	$\{1\} \times \{2\} \times \{1\} \times N$	$\{1\} \times \{2\} \times \{2\} \times N$...
⋮	⋮	⋮	⋮
$\{2\} \times \{0\} \times \{0\} \times N$	$\{2\} \times \{0\} \times \{1\} \times N$	$\{2\} \times \{0\} \times \{2\} \times N$...
$\{2\} \times \{1\} \times \{0\} \times N$	$\{2\} \times \{1\} \times \{1\} \times N$	$\{2\} \times \{1\} \times \{2\} \times N$...
$\{2\} \times \{2\} \times \{0\} \times N$	$\{2\} \times \{2\} \times \{1\} \times N$	$\{2\} \times \{2\} \times \{2\} \times N$...
⋮	⋮	⋮	⋮

图1 集合 N^4 中的所有可数无穷集合

第0类	第1类	第2类	...
$\{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times N$	$\{0\} \times \{0\} \times \{1\} \times N$	$\{0\} \times \{0\} \times \{2\} \times N$...
	$\{0\} \times \{1\} \times \{0\} \times N$	$\{0\} \times \{1\} \times \{1\} \times N$...
	$\{1\} \times \{0\} \times \{0\} \times N$	$\{0\} \times \{2\} \times \{0\} \times N$...
		$\{1\} \times \{0\} \times \{1\} \times N$...
		$\{1\} \times \{1\} \times \{0\} \times N$...
		$\{2\} \times \{0\} \times \{0\} \times N$...

图2 集合 N^4 的分类

	0	1	5	...
$\{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times N$	(0,0,0,0)	(0,0,0,1)	(0,0,0,2) ...	
	2	6	16	
$\{0\} \times \{0\} \times \{1\} \times N$	(0,0,1,0)	(0,0,1,1)	(0,0,1,2) ...	
	3	7	17	
$\{0\} \times \{1\} \times \{0\} \times N$	(0,1,0,0)	(0,1,0,1)	(0,1,0,2) ...	
	4	8	18	
$\{1\} \times \{0\} \times \{0\} \times N$	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,0,2) ...	
	9	19	39	
$\{0\} \times \{0\} \times \{2\} \times N$	(0,0,2,0)	(0,0,2,1)	(0,0,2,2) ...	
⋮	⋮	⋮	⋮	
	29	49	84	
$\{1\} \times \{0\} \times \{2\} \times N$	(1,0,2,0)	(1,0,2,1)	(1,0,2,2) ...	
⋮	⋮	⋮	⋮	

图3 对集合 N^4 所有序四元组的访问次序

2 函数 $f: N^4 \rightarrow N$ 的构造过程

2.1 $f(0,0,0,m)$ 的构造过程

设用 $f(i, j, k, m)$ 表示对有序四元组的访问次序, $i, j, k, m \in N$ 。由数列分析得:

$$f(0,0,0,1) - f(0,0,0,0) = 1$$

$$f(0,0,0,2) - f(0,0,0,1) = 4$$

$$f(0,0,0,3) - f(0,0,0,2) = 10$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f(0,0,0,m) - f(0,0,0,m-1) = 1 + 3 + 6 +$$

$$10 + \dots + \frac{1}{2}m(m+1)$$

将上述各式相加, 消去所有中间项, 并运用文献

[8] 中的数列求和公式整理:

$$f(0,0,0,m) - f(0,0,0,0) = \frac{1}{24}m(m^3 + 6m^2 + 11m + 6)$$

因为 $f(0,0,0,0) = 0$

$$\text{所以 } f(0,0,0,m) = \frac{1}{24}m(m^3 + 6m^2 + 11m + 6)$$

(1)

2.2 $f(0,0,k,m)$ 的构造过程

对 k 归结时, 采用逐级递归的步骤。对每一级 $k = 0, k = 1, k = 2, \dots$, 分别取 $m = 0, 1, 2, \dots$, 用多层嵌套的方法进行。推演过程简述为图4所示, 其中第一层数列是用第二层数列的后项减前项而得, 第二层数列是第三层数列的后项减前项而得。相加图4中各式, 消去中间项得:

	<3	<4	...	(第一层)
	<3	<6	<10	... (第二层)
$f(0,0,1,m)-f(0,0,0,m)=2$	5	11	21	... (第三层)
	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$...
	$=1+\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)$			
	<4	<5	...	(第一层)
	<6	<10	<15	... (第二层)
$f(0,0,2,m)-f(0,0,1,m)=7$	13	23	38	... (第三层)
	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$...
	$=3+\frac{1}{6}(m+2)(m+3)(m+4)$			
$f(0,0,3,m)-f(0,0,2,m)=6+\frac{1}{6}(m+3)(m+4)(m+5)$				
...
$f(0,0,k,m)-f(0,0,k-1,m)=\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{6}(m+k)(m+k+1)(m+k+2)$				

图4 $f(0,0,k,m)$ 的构造过程

$$f(0,0,k,m) - f(0,0,0,m) = \frac{1}{24}k(k+1)(k+2)(k+7) + \frac{1}{12}km(2m^2 + 2k^2 + 3km + 9k + 9m + 11)$$

将(1)式代入并整理得:

$$f(0,0,k,m) = \frac{1}{24}k(k+1)(k+2)(k+7) + \frac{1}{24}m^4 + \frac{1}{12}m^3(2k+3) + \frac{1}{24}m^2(6k^2 + 18k + 11) + \frac{1}{12}m(2k^3 + 9k^2 + 11k + 3)$$

(2)

2.3 $f(0,j,k,m)$ 和 $f(i,j,k,m)$ 的构造过程

同 $f(0,0,k,m)$ 一样, 对 $f(0,j,k,m)$ 和 $f(i,j,k,m)$ 构造仍运用逐级递归的方法。这里直接给出它们的结果式:

$$f(0, j, k, m) = \frac{1}{24}(j+k+m)^4 + \frac{1}{4}(j+k+m)^3 + \frac{11}{24}(j+k+m)^2 + \frac{1}{6}(j+k)^3 + \frac{1}{2}(j+k)^2 + \frac{1}{12}(19j + 7k + 3m) \quad (3)$$

$$f(i, j, k, m) = \frac{1}{24}(i+j+k+m)^4 + \frac{1}{4}(i+j+k+m)^3 + \frac{11}{24}(i+j+k+m)^2 + \frac{1}{6}(i+j+k)^3 + \frac{1}{2}(i+j+k)^2 + \frac{1}{2}i(i+2j+2k) + \frac{1}{12}(25i+19j+7k+3m) \quad (4)$$

上述(4)式即为函数 $f: N^4 \rightarrow N$ 的显式计算式, 通过验证表明它是正确的。

3 双射函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的可计算性分析

由上述递推过程可知, 当 $n > 4$ 时, 函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的构造过程更趋复杂, 仍是一个逐级构造和层次化递归的过程。经观察和分析可得, 对 N^n 中 n 元组的访问次序的计算复杂度是随计算规模 n 呈指数上升的。因此, $f: N^n \rightarrow N$ 的计算是一个特定的 NP 难问题, 没有发现多项式时间的算法。从可判定角度来说, 函数 $f: N^n \rightarrow N$ 是可判定的。

对于函数 $f: N^n \rightarrow N$, 设它的 n 元计算式为 $f(z, \dots, i, j, k, m)$, 其构造过程的算法步骤如下:

(1) 将 n 重笛卡尔积 N^n 中前 $n-1$ 个元素和相等的归为同一类;

(2) 按顺序排列各类, 完整列出 N^n , 展开所有的 n 元组;

(3) 对各 n 元组进行交替访问;

(4) 根据访问顺序的数列特性, 递推出各级计算式。先得出 $f(0, \dots, 0, m)$, 再推出 $f(0, \dots, 0, k, m)$ 和 $f(0, \dots, 0, j, k, m)$ 等;

(5) 归结出 n 元计算式 $f(z, \dots, i, j, k, m)$ 。

对 NP 难问题的可计算性研究及其相应的算法设计是计算理论中有待继续深入研究的课题^[9~11], 其目标是如何使许多看似通俗简单却无可计算解的复杂问题变为具有可计算性或近似可计算, 运用混合优化和并行迭代的算法可作为一条探索途径。

4 结束语

通过对函数 $f: N^4 \rightarrow N$ 构造过程的研究, 分析了

其内在特征规律和启发规则。运用逐级构造和层次递归的方法, 推导出了 $f: N^4 \rightarrow N$ 的显式计算式。从函数 $f: N^2 \rightarrow N, f: N^3 \rightarrow N$ 和 $f: N^4 \rightarrow N$ 的系列计算式可知, 函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的计算复杂度是指数增长的, 对函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的计算属于 NP 难问题之一。进一步应研究的内容是: 当 $n > 4$ 时, 函数 $f: N^n \rightarrow N$ 的计算通式及其可计算性, 探索能否找到该问题的多项式时间界限算法解。

参考文献:

- [1] Richard C; Suresh P. Bounded Queries and the NP Machine Hypothesis[C/OL]. In Proceedings of Twenty-Second Annual IEEE Conference on Computational Complexity (CCC'07). San Diego, CA, 2007: 52 - 59. <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/RecentCon.jsp?punumber=4262736>.
- [2] Collins P, Lygeros J. Computability of finite-time reachable sets for hybrid systems[C/OL]. In Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference (CDC-ECC'05). 2005: 4688 - 4693. <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/RecentCon.jsp?punumber=10559>.
- [3] Calabro C, Impagliazzo R, Paturi R. A duality between clause width and clause density for SAT[C/OL]. Twenty-First Annual IEEE Conference on Computational Complexity, 2006(CCC 2006). 2006: 7. <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/RecentCon.jsp?punumber=11039>.
- [4] Lewis H R, Papadimitriou C H. Elements of the Theory of Computation[M]. Second Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 1999.
- [5] Enderton H B. Elements of Set Theory[M]. 英文版. Beijing: Posts & Telecom Press, 2006.
- [6] 左孝凌, 李为镭, 刘永才. 离散数学[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1982.
- [7] 许精明. 关于双射函数 $f: N \times N \times N \rightarrow N$ 的研究[J]. 微机发展, 2003, 13(10): 102 - 106.
- [8] 《现代数学手册》编纂委员会. 现代数学手册·经典数学卷[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000.
- [9] 张立昂. 可计算性与计算复杂性导引[M]. 第2版. 北京: 北京大学出版社, 2004.
- [10] Michalewicz Z, Fogel D B. 如何求解问题——现代启发式方法[M]. 曹宏庆等译. 北京: 中国水利出版社, 2003.
- [11] 黄文奇, 许如初. 近世计算理论导引——NP 难问题的背景、前景及其求解算法研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

(上接第 99 页)

- [4] 汪小燕, 杨思春. 一种新不一致决策表属性约简算法[J]. 计算机应用, 2008, 28(2): 525 - 527.
- [5] 支天云, 苗夺谦. 二进制可辨矩阵的变换及高效属性约简

算法的构造[J]. 计算机科学, 2002, 29(2): 140 - 142.

- [6] 张文修, 米据生, 吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机学报, 2002, 25(1): 12 - 18.