第18卷 第8期
2008年8月

计算机技术与发展
COMPUTER TECHNOLOGY AND DEVELOPMENT

Vol.18 No.8
Aug. 2008

求解无约束全局优化的改进的单填充函数法

骆世云,叶仲泉
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘 要:填充函数法是一种求解多变量、多极值函数全局最优化的有效方法,这种方法的关键是构造填充函数。为此文中根据文献[1]的思想,考虑优化问题 $\min_{x\in R^n} f(x)$,针对 $f(x)$ 为局部 Lipschitz 连续函数,构造了一种简单的单填充函数,容易证明相对于传统的填充函数,该填充函数在参数较小时就能保持其填充性质,且全局收敛速度快。根据这个填充函数还提出了一个求解无约束优化问题的填充函数算法,对4个基准测试函数的数值试验表明该方法是有效的。

关键词:填充函数法;全局优化;数值实验

中图分类号:O221.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2008)08-0108-03

A Modified Single-Parameter Filled Function Method for Unconstrained Global Optimization

LUO Shi-yun, YE Zhong-quan
(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The filled function method is an effective approach for finding the global minima of multimodal and multidimensional functions, and the constructed filled function is vital to the results of optimization. Therefor, by the thought of the literature[1], considering the optimization problem $\min_{x\in R^n} f(x)$, when $f(x)$ is local Lipschitz continuous function, proposed a modified single-parameter filled function. It is easy to prove that this new filled function can keep filling properties easily relative to conventional filled functions, furthermore, its global convergent speed is rapid. The corresponding algorithm was also discussed in this paper. Numerical experience for 4 test functions indicate that the new method is better than the method in the reference.

Key words: filled function method; global optimization; numerical experiment

0 引 言

填充函数法最早是由葛人溥在文献[1]中首先提出的。它的基本思想是:找到一个局部最优点 x_1^* 后,在该点建立辅助函数,该函数的稳定点位于比 x_1^* 所在域更好的区域中。通过优化辅助函数,帮助优化程序跳出局部最优点 x_1^* 到下一个更优点 x_2^*,再建立辅助函数。重复以上过程,并在一定的条件下结束运算。事实上,填充函数解决全局优化的问题是通过两个阶段循环达到的。文献[1]中给出了一个双参数填充函数:$P(x,x_1^*,r,\rho)$,式中 x_1^* 为一个已知的局部极小点,r,ρ 为参数。该函数由于受指数项的影响,当 x 远离 x_1^* 或者 ρ^2 很小时,它会使填充函数以及其梯度接近于零或者零向量,且有可能找到某些假的平稳点,也有可能丢失 $f(x)$ 的全局极小点。文献[2,3]针对两个参数不易调节、假设过多、实际问题不易满足等问题利用文献[1]的定义构造了实用的填充函数;还有文献对填充函数定义加以修改,如文献[4,5],构造出了几个形式更为简单易于计算的填充函数。文中是在以上文献的基础上给出的一种有效的单填充函数。

1 假设与定义

文中考虑优化问题 (P):

$$\min_{x\in R^n} f(x) \tag{1}$$

式中 $f(x)$ 满足以下条件:

(i) $f(x)$ 在 R^n 上是 Lipschitz 连续的,即存在常数 $L>0$,使得对任意的 $x,y\in R^n$,有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L\|x-y\|$;

(ii) $f(x)$ 满足强制性条件,即 $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x)=+\infty$;

(iii) 问题 (P) 的局部极小点的个数为有限个。

收稿日期:2007-11-17

作者简介:骆世云(1981-),女,河南潢川人,硕士研究生,主要研究方向为最优化理论与算法;叶仲泉,教授,博士,主要研究方向为非线性分析、控制论、人工神经网络。

根据以上假设条件,则存在足够大的有界闭区域 Ω,Ω 包含 $f(x)$ 的所有局部极小点,因此式(1)等价于求问题(P') $\min\limits_{x\in\Omega} f(x)$。

文中采用杨永健等在文献[4]中的定义。下文关于盆域的定义可参考文献[1]。

定义 函数 $F(x,x_1^*,\rho)$ 称为 $f(x)$ 在局部极小点 x_1^* 处的填充函数,如果它满足以下条件:

(1) 在 Ω 上 x_1^* 是 $F(x,x_1^*,\rho)$ 的严格局部极大点;

(2) 对任意的 $x \in S_1$,有 $\nabla F(x,x_1^*,\rho) \neq 0$,这里 $S_1 = \{x \mid f(x) \geqslant f(x_1^*), x \in \Omega \setminus \{x_1^*\}\}$,即 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在 S_1 上没有极小点或鞍点;

(3) 若 x_1^* 不是全局极小点,则 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在 $S_2 = \{x \mid f(x) < f(x_1^*), x \in \Omega\}$ 上必有局部极小点。

2 填充函数及其性质

构造填充函数

$$F(x,x_1^*,\rho) = -\operatorname{sign}(f(x) - f(x_1^*))\, \| x - x_1^* \|^2 + \rho\max\{0, f(x) - f(x_1^*)\}$$

其中 $\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1, t \geqslant 0 \\ -1, t < 0 \end{cases}$,$x_1^*$ 是 $f(x)$ 的当前局部极小点,$\rho > 0$ 为参数。

下面定理表明 ρ 在满足一定条件下时,$F(x,x_1^*,\rho)$ 是 $f(x)$ 在点 x_1^* 处的填充函数。

定理 1 设 x_1^* 是问题(P)的局部极小点,则当 $0 < \rho < c/L$ 时,x_1^* 是 $F(x,x_1^*,\rho)$ 的局部严格极大点,这里 $\| x - x_1^* \| \leqslant c$。

证明 由 x_1^* 是问题(P)的局部极小点,则存在 x_1^* 的邻域 $N(x_1^*,\delta^*)$ 使得对任意的 $x \in N(x_1^*,\delta^*)$,$\delta^* > 0$,有 $f(x) \geqslant f(x_1^*)$,从而对任意的 $x \in N(x_1^*,\delta^*)$,$x \neq x_1^*$ 有 $F(x,x_1^*,\rho) = -\| x - x_1^* \|^2 + \rho(f(x) - f(x_1^*)) \leqslant -\| x - x_1^* \|^2 + \rho(L \| x - x_1^* \|) < 0 = F(x,x_1^*,\rho)$,于是对任意的 $x \in N(x_1^*,\delta^*)$,$\delta^* > 0$,有 $F(x,x_1^*,\rho) < F(x_1^*,x_1^*,\rho)$。

定理 2 函数 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在区域 S_1 的梯度设 $\nabla F(x,x_1^*,\rho) \neq 0$,即函数 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在 S_1 上没有平稳点。

证明 由 $f(x) \geqslant f(x_1^*)$,$x \neq x_1^*$,知

$$F(x,x_1^*,\rho) = -\| x - x_1^* \|^2 + \rho(f(x) - f(x_1^*))$$

$$\nabla F(x,x_1^*,\rho) = -2(x - x_1^*) + \rho\nabla f(x)$$

若 $\nabla f(x) = 0$,则 $\nabla F(x,x_1^*,\rho) = -2(x - x_1^*) \neq 0$

若 $\nabla f(x) \neq 0$,将 $d = \dfrac{x - x_1^*}{\| x - x_1^* \|}$ 与 $\nabla F(x, x_1^*,\rho)$ 作内积可得:

$$\nabla F(x,x_1^*,\rho)^T \cdot d = -2 \| x - x_1^* \| + \rho \frac{\nabla f(x)^T(x - x_1^*)}{\| x - x_1^* \|}$$

(i) 若 $(x - x_1^*)^T\nabla f(x) \leqslant 0$,,则 $\nabla F(x,x_1^*,\rho)^T \cdot d < 0$

(ii) 若 $(x - x_1^*)^T\nabla f(x) > 0$,当 ρ 充分小时,$\nabla F(x,x_1^*,\rho)^T \cdot d < 0$

于是可知当参数 ρ 充分小时,对任意的 $x \in S_1$,$\nabla F(x,x_1^*,\rho)^T \neq 0$。

定理 3 若当前极小点 x_1^* 不是 $f(x)$ 在 Ω 上的全局极小点,则 $f(x)$ 一定存在另一极小点 x_0^* 使得 $f(x_0^*) < f(x_1^*)$。选取 $0 < \rho < c/L$,则 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在 x_0^* 的邻域 $N(x_0^*,\delta_0^*)$ 中任意一点 $\overline{x_0^*}$ 与 x_1^* 的连线 L 上的任意一点达到极小,且此极小点落在 $f(x)$ 的盆域 B_0^* 中。

证明 设 x' 是 x_1^* 与 $\overline{x_0^*}$ 连线 L 上的任意一点,且 x_0^* 在 $f(x)$ 的盆域 B_0^* 中,又令集合

$$M = \{x \in R^n : f(x) = f(x_1^*)\} \cap L$$

若有 $x_1 \in M$,则有 $f(x) = f(x_1^*)$,于是有 $F(x, x_1^*,\rho) = -\| x_1 - x_1^* \|^2$

事实上,存在一个充分小的 $\varepsilon_0 > 0$,当 $x' \in (x_1 - \varepsilon_0, x_1)$ 时,有 $\| x' - x_1^* \| \leqslant \| x_1 - x_1^* \|$,$f(x') \geqslant f(x_1)$,所以 $F(x',x_1^*,\rho) = -\| x' - x_1^* \|^2 + \rho(\max(0, f(x') - f(x_1^*))) = -\| x' - x_1^* \|^2 + \rho \cdot (f(x') - f(x_1^*)) \geqslant -\| x_1 - x_1^* \|^2 = F(x_1,x_1^*,\rho)$ 当 $x' \in (x_1, x_1 + \varepsilon_0)$,$x' \in L$,有 $\| x' - x_1^* \| \geqslant \| x_1 - x_1^* \|$ 且 $f(x_0^*) \leqslant f(x') < f(x_1^*)$

$$F(x',x_1^*,\rho) = -\operatorname{sign}(f(x') - f(x_1^*))\, \| x' - x_1^* \|^2 + \rho(\max(0, f(x') - f(x_1^*))) = \| x_1 - x_1^* \|^2 \geqslant -\| x_1 - x_1^* \|^2 = F(x_1,x_1^*,\rho)$$

于是可知 x_1 是 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在 $\overline{x_0^*}$ 与 x_1^* 的连线 L 上的局部极小点,且落在 $f(x)$ 的盆域 B_0^* 中。

定理 1,2,3 表明在某些假设条件下 $F(x,x_1^*,\rho)$ 是 $f(x)$ 的一个填充函数。

3 算法及其数值试验

3.1 求解问题(P')全局解的新的填充函数法

(1)初始化误差限:$\varepsilon = 10^{-4}$;参数 ρ 的缩小比例 $\hat{\rho} = 10^{-1}$;参数 ρ 的下界 $\rho_L = 10^{-8}$;ρ 初始值 $\rho = 1$;步长

$\delta = 0.1$；初始点 $x_1 \in \Omega$；$k := 1$。

(2) 以 $x_1 \in \mathrm{int}\Omega$ 为初始点，运用已有的局部下降算法求得问题(P')的一个局部极小点，记作 x_1^*。

(3) 在 x_1^* 处构造填充函数 $F(x, x_1^*, \rho)$，从靠近 x_1^* 的一个初始点开始极小化 $F(x, x_1^*, \rho)$，所得的序列为 $\{x_k^i\}$，如果 $\{x_k^i\}$ 走出了 Ω，可采用坐标轮换搜索法，置 $x_k^i := x_1^* \pm \delta e_i, i = 1,2,\cdots,n$

其中 $e_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为单位坐标向量，如果以 x_k^i 为初始点所得到的极小化序列依然离开 Ω，则转向(7)。

(4) 若 $i \leqslant 2n, \rho \geqslant \rho_L$，则令 $x := x_k^i$，然后转到(5)；否则找不到更好的极小点，x_k^* 即为 $f(x)$ 的全局极小点，算法终止。

(5) 若 $f(x) \leqslant f(x_1^*)$，则以 x 为初始点极小化 $f(x)$ 得到极小点 x_{k+1}^* 且 $f(x_{k+1}^*) < f(x_1^*)$，令 $x_1^* = x_{k+1}^*, k := k+1$，转到(3)，否则转到(6)。

(6) 选择方向 $d = -\nabla F(x, x_1^*, \rho)$ 为填充函数的下降方向。沿此方向搜索，令 $x = x + \delta d$，同时判断下列条件是否成立：

(i) $f(x) < f(x_1^*)$；

(ii) $\| \nabla F(x, x_1^*, \rho) \| \leqslant \varepsilon$；

(iii) $\nabla f(x) \leqslant \varepsilon$

若其中之一成立，则令 $k = k + 1$ 并且 $x_k^0 = x$，转向(1)。

(7) 减少 ρ，令 $\rho := \rho \cdot \hat{\rho}$，转向(4)，否则转(6)。

3.2 数值实验

下面将通过数值试验来验证算法的有效性，以下算例是在 Pentium IV 微机上采用 Matlab 7.01 语言编程进行运算的，其中极小化目标函数的局部优化算法采用 PRP 共轭梯度法，终止准则是 $\rho < 10^{-8}$。

以下算例可参见文献[2]。

(1) 6 - hump back camel 函数。

全局最优解：$x^* = (0.0898, 0.7127)^T$

全局最优值：$f(x^*) = -1.0316$

(2) Two - dimensional 函数。

文中取 $c = 0.2$。全局最优值：$f(x^*) = 0.0000$。

(3) n - dimensional Sine - square 函数。

文中测试 $n = 5$。

全局最优解：$x^* = (1.0000, 1.0000, \cdots, 1.0000)$

全局最优值：$f(x^*) = 0.0000$

(4) Goldstein and Price 函数。

它在给定的可行域里有四个局部极小点，但有唯一的全局极小点：

$x^* = (0, -1), f(x^*) = 0$

为了说明算法的有效性，将文献[2]与文中算法对同样的算例、同样的初始点在同一计算机用 Matlab 7.01 语言编程进行运算。所得结果如表 1 ~ 4 所示，表中符号意义如下：

x_k^0：k 次迭代的初始点；k：找到第 k 个局部极小点算法迭代次数；x_k^*：第 k 个局部极小点；$f(x_k^*)$：第 k 个局部极小值；T：算法结束时 CPU 所用的时间（单位：秒）。

表 1 算例 1，初始点 $x_1 = (2,2)$

	文献[2]			文中		
T	0.562000			0.094000		
k	ρ	x_k^*	$f(x_k^*)$	ρ	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	–	$\begin{pmatrix}1.7036\\0.7961\end{pmatrix}$	-0.2155	–	$\begin{pmatrix}1.7036\\0.7961\end{pmatrix}$	-0.2155
2	100	$\begin{pmatrix}0.0898\\0.7127\end{pmatrix}$	-1.0316	0.010	$\begin{pmatrix}0.0898\\0.7127\end{pmatrix}$	-1.0316

表 2 算例 2，初始点 $x_1 = (0, -2)$

	文献[2]			文中		
T	–			0.250000		
	ρ	x_k^*	$f(x_k^*)$	ρ	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	–	$\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$	29	–	$\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$	29
2	100	$\begin{pmatrix}2.1681\\-1.7870\end{pmatrix}$	11.1662	0.1	$\begin{pmatrix}3.7387\\-1.2649\end{pmatrix}$	0.6165
3	100	$\begin{pmatrix}2.7380\\-0.7884\end{pmatrix}$	0.0887	0.1	$\begin{pmatrix}2.7380\\-0.7884\end{pmatrix}$	0.0887
4				0.01	$\begin{pmatrix}1.8784\\-0.3458\end{pmatrix}$	4.4046e-16

表 3 算例 3，$n = 5$，初始点 $x_1 = (2,2,2,2,2)$

	文献[2]			文中		
T	1.799			0.265000		
	ρ	x_k^*	$f(x_k^*)$	ρ	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	–	$\begin{pmatrix}1.9899\\1.9897\\1.9896\\1.9896\\1.9898\end{pmatrix}$	3.1096	–	$\begin{pmatrix}1.9899\\1.9897\\1.9896\\1.9896\\1.9898\end{pmatrix}$	3.1096
2	1e-4	$\begin{pmatrix}1.0000\\1.0000\\1.0000\\1.0000\\1.0000\end{pmatrix}$	0	1e-4	$\begin{pmatrix}1.0000\\1.0000\\1.0000\\1.0000\\1.0000\end{pmatrix}$	0

表 4 算例 4，初始点 $x_1 = (-1, -1)$

	文献[2]			文中		
	ρ	x_k^*	$f(x_k^*)$	ρ	x_k^*	$f(x_k^*)$
T	0.325000			0.188000		
1	–	$\begin{pmatrix}-0.6000\\-0.4000\end{pmatrix}$	30	–	$\begin{pmatrix}-0.6000\\-0.4000\end{pmatrix}$	30
2	1e-5	$\begin{pmatrix}0.0000\\-1.0000\end{pmatrix}$	3.0000	1e-5	$\begin{pmatrix}0.0000\\-1.0000\end{pmatrix}$	3.0000

(下转第 151 页)

5　结束语

以上基于PC/104硬件仿真平台的16位存储器容错技术，可有效对RAM的存储单元进行纠错检错处理，消除SEU的影响。

在整个小卫星仿真模拟过程中，该方法得到了多次很好的验证，可以满足当前的要求。同时将FPGA引入到整个硬件仿真过程当中，在modelsim仿真过程中取得了良好的效果。

随着FPGA在航天领域的广泛应用，采用FPGA完成整个检错纠错功能也成为一种趋势。当然这种纠错设计也有一些不足之处，它要求在存储器中加入30%左右的冗余存储器，同时由于检错纠错需要时间，CPU不得不在存储读写时插入等待周期，从而一定程度上降低了处理器的性能。

因此，这里考虑在下一步的工作中将该检错容错方法和滞后校验结合起来，允许错误的数据进入处理器。这样，处理器在读取数据时就不需要等待检错纠错的结果，直接从存储器中读取，而数据的校验和纠正滞后于数据的读入。

参考文献：

[1] 余金陪，杨根庆．现场小卫星技术与应用[M]．上海：上海科学普及出版社，2004．

[2] Tang Ming, Bu—Sung, Yeo Chai—Kiat, et al. Dynamic replication algorithms for the multi - tier data grid[J]. Future Generation Computer Systems, 2005, 16(1): 21 - 39.

[3] Kent S T. Logic and computer design fundamental[M]．北京：电子工业出版社，1998．

[4] Ciletti M D. VerilogHDL高级数字设计[M]．北京：电子工业出版社，2005．

[5] Xilinx, Inc. Virtex - II Platform FPGA User Guide[R]. [s. l.]: Xilinx, Inc., 2005.

[6] Wang J J, Katz R B. SRAM Based Re - programmable FPGA for Space Applications[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1999, 18(1): 14 - 20.

[7] 胡　谋．计算机容错技术[M]．北京：中国铁道出版社，1998．

[8] 陆如新．可编程专用集成电路原理设计和应用[M]．北京：电子工业出版社，1997．

[9] 潘　松，王国栋．VHDL实用教程[M]．成都：电子科技大学出版社，2000．

（上接第107页）

3　结束语

基于有向边的顺序法是针对资源受限平台提出的，有目的性地选择符合条件的分割边进行分割，避免了分割的盲目性，运行效率高，占用资源少，适合手机、PDA等资源受限设备。将其应用到地理信息系统手机终端的设计中，能较好地满足程序需要。同时也能应用到其他，如手机游戏地图等，需要填充多边形处理的应用服务中。

参考文献：

[1] 马小虎，潘志庚，石教英．基于凹凸顶点判定的简单多边形Delaunay三角剖分[J]．计算机辅助设计与图形学学报，1999，11(1)：1－3．

[2] 杨　杰．基于凹凸顶点判定的简单多边形的三角剖分[J]．小型微型计算机系统，2000，21(9)：974－975．

[3] 刘　强，李德仁．基于二叉树思想的任意多边形三角剖分递归算法[J]．武汉大学学报：信息科学版，2002(5)：529－533．

[4] 帅小应，廉东本．Java手机多边形处理的研究[J]．小型微型计算机系统，2006，27(2)：279－281．

[5] 吴文虎，王建德．实用算法的分析与程序设计[M]．北京：电子工业出版社，1998：80－83．

（上接第110页）

4　结束语

由以上算例仿真结果比较，可以看出文中的算法比文献[2]无论是在精度上还是在算法结束CPU所用的时间上更加有效。

参考文献：

[1] Ge Renpu. A filled function method for finding a Global Minimizer of a function several variables[C]//Dundee Biennial conference on numerical analysis. Dundee, Scotland: [s. n.], 1981.

[2] Liang Y M, Zhang L S, Li M M, et al. A filled function meth - od for global optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 205: 16 - 31.

[3] Han Qiaoming, Han Jiye. Revised filled function methods for global optimization[J]. Applied Mathematics and Computa - tion, 2001(119): 217 - 228.

[4] Yang Y J, Shang Y L. A New Filled Function Method for Unconstrained Global Optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006(173): 501 - 512.

[5] Zhang L S, NG C K, Li D, et al. A new filled function met - hod for global optimization[J]. Global Optim, 2001, 20: 49 - 65.