

# 基于小波不可分离多分辨率的图像重建

王斯刚<sup>1</sup>, 边根庆<sup>2</sup>, 屈学民<sup>1</sup>, 杨继庆<sup>1</sup>

(1. 第四军医大学 物理教研室, 陕西 西安 710032;

2. 西安建筑科技大学 信控学院, 陕西 西安 710055)

**摘要:**文中提出并实现了一种基于小波不可分离多分辨率的重建算法。在图像重建领域内利用小波变换时, 是对二维图像进行行和列的依次滤波, 需要假定二维信号是关于自变量  $x$  和  $y$  可分离的, 而实际二维信号中大多是不宜分开处理的。在算法中首先将投影数据进行二通道的小波分解, 在分解抽样中, 使用不同的抽样方法, 直接得到小波的近似系数和细节系数, 这些系数再经过逆小波变换得到最终的重建图像。基于不可分离多分辨率的小波算法将投影数据进行二通道的小波分解。

**关键词:**图像重建; 小波变换; 多分辨率

**中图分类号:** TP751.1

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2008)07-0247-03

## Image Reconstruction Based on Wavelet Non-Separable MRA

WANG Si-gang<sup>1</sup>, BIAN Gen-qing<sup>2</sup>, QU Xue-min<sup>1</sup>, YANG Ji-qing<sup>1</sup>

(1. Physics Office, Fourth Military Medical University, Xi'an 710032, China;

2. Info. & Control Institute of Xi'an Univ. of Arch. Tech., Xi'an 710055, China)

**Abstract:** Propose and realize a wavelet reconstruction algorithm based on non-separable MRA. In the area of image reconstruction using wavelet transform, the two-dimensional image, in order to filter out and the need on the assumption that two-dimensional signal is variable  $x$  and  $y$  separable, and the actual two-dimensional signal is not appropriate to separate most of deal with it. Firstly, disposed the projection data with two channel wavelet to obtain the approximate coefficient and the detail coefficient of the image through using different sample methods. This algorithm has not only the local reconstruction characteristic but also improves the reconstruction quality as well as the calculation speed.

**Key words:** image reconstruction; wavelet transform; MRA

## 0 引言

在图像重建过程中, 需要利用 X 射线射入人体, 从射线的衰减方程中得到人体截面的数据图像。众所周知, X 射线对人体有伤害, 如何减少 X 射线的摄入就显得十分重要。利用小波理论进行图像重建是利用小波的局部性, 即使用局部数据就可以得到局部图像。这样可以减少 X 射线对人体的射入。通常在图像重建领域内利用小波变换时, 是对二维图像进行行和列的依次滤波<sup>[1]</sup>, 也就是说假定二维信号是关于自变量  $x$  和  $y$  可分离的, 而实际二维信号中大多是不宜分开处理的。基于不可分离多分辨率的小波算法将投影数据进行二通道的小波分解, 从而可以得到小波的近似

系数和细节系数, 这些系数再经过逆小波变换得到最终的重建图像。对算法进行仿真实验, 其结果不但具有基于可分离多分辨率分析 (MRA, Multiresolution Analysis) 的小波重建算法基本相同的局部重建特性, 且重建质量和运算速度都有所提高。

## 1 小波不可分离多分辨率分析重建算法

对于小波重建算法, 首先给出双尺度方程为<sup>[2]</sup>:

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_0(k) \Phi(Dx - k) \quad (1)$$

$$\Psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_1(k) \Psi(Dx - k)$$

对于固定的尺度  $j$ ,  $\{\Phi_{i,k}, k \in \mathbb{Z}^2\}$  构成  $V_j$  空间的一个非正交基,  $\{\Psi_{i,k}, i = 1, \dots, N-1\}$  构成空间  $W_j$  的非正交基, 而对于抽样矩阵  $D$ , 定义  $N = |\det D|$ , 则

$$\Phi_{j,k}(x) = |\det D|^{-(j/2)} \Phi(D^{-j}x - k)$$

其中,  $h_0(x)$  和  $h_1(k)$  分别为二维低通滤波器和

收稿日期: 2007-12-23

基金项目: 陕西省科技基金项目 (05F38)

作者简介: 王斯刚 (1970-), 男, 江西吉安人, 高级实验师, 从事电子技术与物理的教学和研究。

二维高通滤波器,可以通过一维滤波器利用 McClellan 变换得到<sup>[2]</sup>:用二维零相位滤波器代替 $(\cos \omega)$ ,从而二维的频率响应为:

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^N a(n) T_n[F(\omega_1, \omega_2)]$$

对于梅花五点抽样方法:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}(\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2))$$

为了避免混叠现象,取

$$h_1 = \tilde{h}_0(-z_1, -z_2), \tilde{h}_1 = -h_0(-z_1, -z_2) \quad (3)$$

其中,  $h_0, h_1$  表示分解低通和高通分解滤波器,  $\tilde{h}_0, \tilde{h}_1$  表示低通和高通重构滤波器。对于尺度函数对  $\{\Phi, \tilde{\Phi}\}$  及  $N-1$  对小波函数  $\{\Psi, \tilde{\Psi}\}$ , 函数  $f \in L^2(R^2)$  可以分解为双正交小波序列<sup>[3]</sup>:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \tilde{\Phi}_{j,k}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \tilde{\Psi}_{j,k}(x) \quad (4)$$

其中,  $\langle f, \Phi_{j,k} \rangle$  是  $f$  在子空间  $V_j$  上的投影, 表示  $f$  在  $V_j$  上的离散近似系数。

从式(2)可得:  $|\det D| = 2$ , 所以, 在分辨率为  $j$  时, 原图像  $f$  可分解为: 近似图像  $A_j f[n]$  和细节图像  $D_j f[n]$ :

$$A_j f[n] = \langle f, \Phi_{j,n} \rangle = (f * \tilde{\Phi}_{j,0})(D^n n) \quad (5)$$

$$D_j f[n] = \langle f, \Psi_{j,n} \rangle = (f * \tilde{\Psi}_{j,0})(D^n n)$$

其中,  $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(-x)$ ,  $\tilde{\Psi}(x) = \Psi(-x)$ 。

则对于滤波反投影算法<sup>[4]</sup>  $f = R^* \wedge R_d f$ , 可以写为:

$$A_j f[n] = (f * R^* \wedge R_d \tilde{\Phi}_{j,0})(D^n n) = R^*(R_d f * \wedge R_d \tilde{\Phi}_{j,0})(D^n n) \quad (6)$$

$$D_j f[n] = (f * R^* \wedge R_d \tilde{\Psi}_{j,0})(D^n n) = R^*(R_d f * \wedge R_d \tilde{\Psi}_{j,0})(D^n n) \quad (7)$$

在形式上, 不可分离的二维多分辨率分析和可分离的二维多分辨率分析是相同的。在基于可分离的二维多分辨率分析算法中:  $\Phi_{j,0}(x) = \phi_{2^j}(x)\phi_{2^j}(y)$ ,  $\phi_{2^j}(x) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x)$ 。

利用式(1)写式(5)如下:

$$\begin{aligned} A_j f[n] &= f * h_0^j(D^n n) \\ h_0^j[n] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_0(k) h[n - D^{j-1}k] \\ D_j f[n] &= f * h_1^j(D^n n) \end{aligned} \quad (8)$$

$$h_1^j[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_1(k) h^{j-1}[n - D^{j-1}k]$$

将式(8)代入式(6)可得:

$$A_j f[n] = \int_0^\pi (p_\theta * k_{\theta,h_1}^j)(D^n n, \theta) d\theta$$

其中,  $K_\theta(w) = |w| \times H_\theta(w \cos \theta, \frac{S_0}{S_p} w \sin \theta), H_0$

是  $h_0^j[n]$  (式(8)) 的二维傅里叶变换。

算法可以写为以下步骤:

首先, 用  $k_{\theta,h_1}^j$  和  $k_{\theta,h_0}^j$ , 对投影函数  $p_\theta(n)$  进行离散卷积:  $p_{\theta,h_0} = p_\theta * k_{\theta,h_1}^j$

然后, 按照原来抽样矩阵  $D$  抽取的点, 将结果反投影到待建图像中, 得到小波系数:

$$A_j f[n], D_j f[n]$$

最后, 进行二维小波重构:

$$A_{j-1} f = A_j f * \tilde{h}_0 + D_j f * \tilde{h}_1$$

由于滤波器组不是正交的, 所以分解滤波器和重构滤波器是不同的 (见式(3))。

## 2 实验仿真

用像素 Shepp-Logan 头部模型的全局图像重建, 使用的是 Coiflet2 小波。在  $[0, \pi]$  之间, 对图像进行平行投影: 每次旋转角度为  $\pi/180$ , 每个角度 256 条平行射线, 重建的图像大小为  $256 \times 256$  像素。一层近似图像和一层细节图像如图 1 所示, 全局重建图像如图 2 所示, 重建图像如图 3 所示。

重建区域为头部模型中心半径为 64 个像素的图像区域, 细节图像和重建图像分别如图 4 和图 5 所示。局部原图像和 FBP 算法重建的局部图像如图 6 所示。

## 3 算法分析

从图像质量方面看, 在算法中使用了梅花五点抽

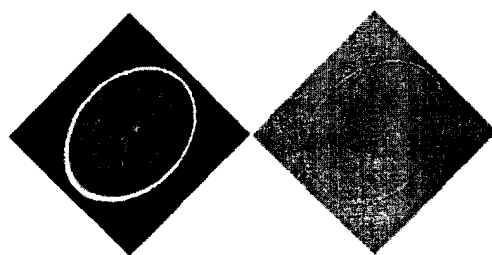


图 1 一层近似图像和一层细节图像

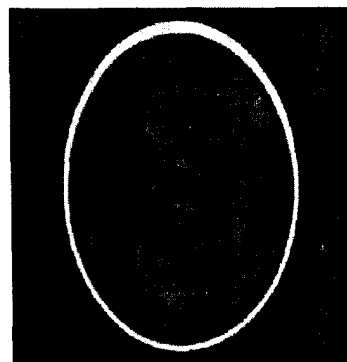


图 2 全局重建图像

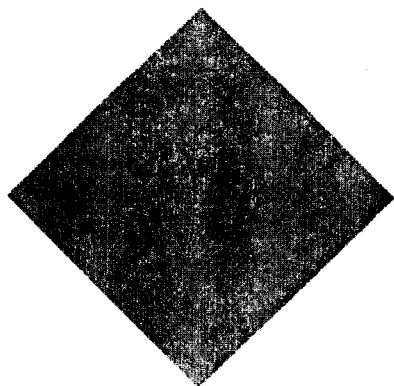


图3 局部重建一层细节图像

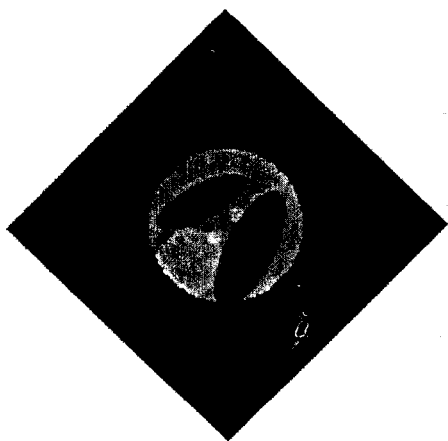


图4 局部重建一层图像近似图像

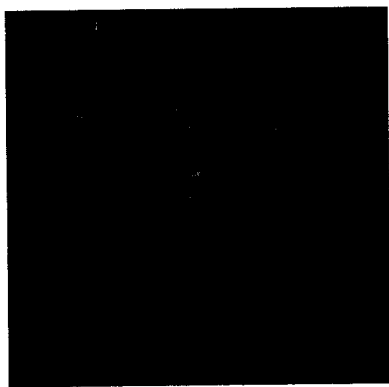
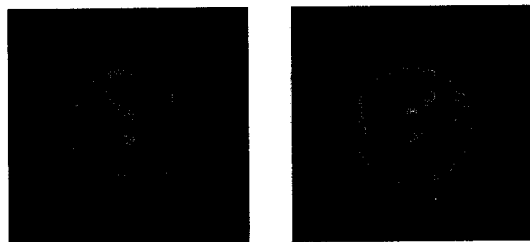


图5 半径为64个像素的局部图像



(a) 原始局部图像 (b) 用FBP使用全部投影数据建立的局部图像

图6 原始局部和用FBP算法重建的局部图像  
取方式,所以图1中的近似图像和细节图像旋转了角度,是按照对角线方向抽取的。抽取后每层近似图像和细节图像的抽样点是上一层图像的一半。每一层近

似图像和细节图像的每一维的像素点是相等的,而且等于上一层图像的  $1/\sqrt{2}$ 。在均方误差分析中,MSE的值为0.091,比基于可分离多分辨率分析理论的小波重建方法<sup>[1]</sup>重建图像的MSE小约10%,和FBP算法的MSE基本相同。这种更小的图像损失量是由于在滤波过程中,可分离多分辨率分析算法的卷积是先在一维下进行的,所以图像被分离为行列无关联的信号,对于不可分离多分辨率分析重建算法,卷积使用的是二维滤波,这样图像被看作是一体的,而不是行和列分离的。

在图像算法复杂度方面,由于待建图像的像素大小并没有增加,在基于不可分离多分辨率分析理论的小波多尺度重建中,对于反投影这一步的计算量来说是和滤波反投影法一样的。只是用于重建的两套滤波后的投影数据之间互不相同,它们分别被用来重建图像的大致轮廓和细节特征。所以  $m \times n$  的图像  $n$  角度投影时,对于反投影这一步的复杂度还是  $O(nm^2)$ ,而且这个复杂度与重建过程中小波分解的层数无关。而对于重建过程中的滤波这一步来说,它的复杂度是和小波分解的层数是相关联的。在滤波反投影法中,滤波这一步的复杂度为  $O(nm \log m)$ 。所以在多尺度重建算法中对于小波分解的每一层,滤波这一步的复杂度都是  $O(nm \log m)$ 。由于最大的分解层数可以达到  $\log_2 2m$ ,这就使得总的滤波的复杂度可上升到  $O(nm \log^2 m)$ 。基于以上分析,和滤波反投影法相比,基于不可分离多分辨率分析的小波多尺度重建算法会花费更多的时间用于滤波,但与基于可分离多分辨率的小波多尺度重建算法用于滤波的时间减少一半。把反投影和滤波结合起来之后,基于不可分离多分辨率分析的小波多尺度重建算法总的复杂度为  $O(nm^2)$ 。

在局部成像方面,假定需要重建是位于图像中心半径为  $r_i$  的局部区域。在不可分离多分辨率分析重建算法中,重构滤波器的支撑区间略大于可分离多分辨率分析重建算法中的支撑区间,而且滤波器经过希尔伯特变换之后也不是绝对的紧支集函数,所以需要将X射线的照射区域的半径为  $r_e$  也略大于可分离多分辨率分析小波重建算法。

从局部性的分析来看,多分辨率分析的小波重建算法复杂度要低。由于总的算法复杂度基本相同,而且使用在滤波的时间上是可分离多分辨率分析小波重建算法的一半。而总的算法复杂度为  $O(nr_e^2)$ ,是取决于反投影的部分。全局重建的复杂度为  $O(nm^2)$ ,由于  $r_e$  比  $m$  少了很多,从而在算法实际运行时,多分辨率分析的小波重建算法所消耗的时间也就少很多。

(下转封三)

会得到准确率更高的种群来。图4为实验中具体的建筑造型变异后的结果。

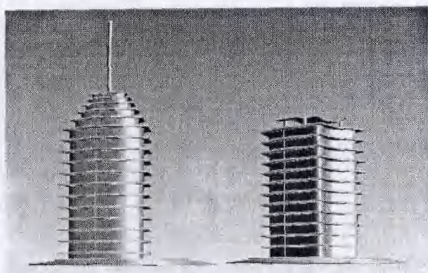


图4 进行变异操作之后的个体

### 3.4 实验结果

采用 VC++ 6.0 在 Windows XP 平台上开发上述建筑造型创新设计系统,三维引擎 ACIS 实现了建筑组件的可视化。以下几幅图片就是几座经过改进的交互式遗传算法操作后得到的比较优秀的建筑造型,建筑设计师可以从这些图片中产生创作灵感,更可以帮助他们方便、快捷地制作出具创新性的建筑设计。图5,图6均为实验效果图。

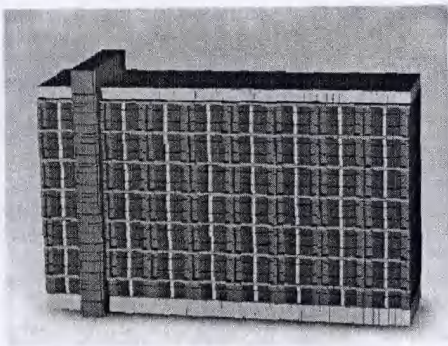


图5 实验效果图(1)

## 4 结束语

针对交互式遗传算法中人的疲劳问题,通过将根据配对个体之间的相似度值自适应地确定交叉率的方法引入交互式遗传算法中,提高了交互式遗传算法的速率,减少了用户评估时间,有效解决了用户疲劳的问题。文中的建筑造型创新设计系统具有很强的现实意义以及实用性和创新性。本系统的数据库还可以加以扩充,将建筑分为更加复杂的部分,同时给各个部分更多的样式选择,或者结合其他的领域,也将会有更广泛的应用。

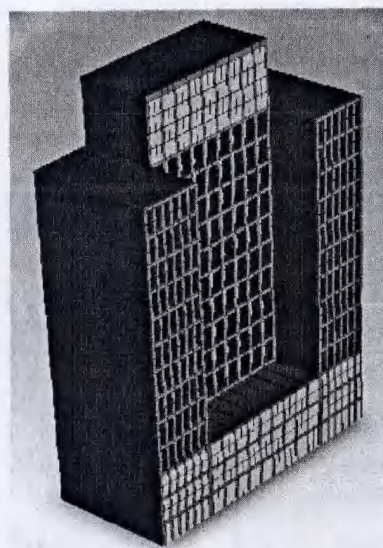


图6 实验效果图(2)

### 参考文献:

- [1] 刘弘,刘希玉,唐明晰,等.支持外观造型创新设计的计算机辅助设计环境[J].计算机辅助设计与图形学学报,2003,15(11):1258-1264.
- [2] 李军华,黎明,袁丽华.基于个体相似度交叉率自适应的遗传算法[J].系统工程,2006,24(9):108-111.
- [3] 蚁平,曹先彬.基于交互式遗传算法的个性化建筑物外观设计[J].计算机仿真,2006,23(5):156-159.
- [4] Kim H S, Cho S B. Application of interactive genetic algorithm to fashion design[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2000, 13(6): 635-644.
- [5] 范磊,阮怀忠,焦誉,等.用归纳学习引导进化[J].中国科学技术大学学报,2001,30(5):565-570.
- [6] Lee Joo-Young, Cho Sung-Bae. Sparse fitness evaluation for reducing user burden in interactive genetic algorithm[C]// 1999 IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceedings. Seoul: [s. n.], 1999: 998-1003.
- [7] Sprinivasan B, Palanki S, Bonvin D. Dynamic optimization of batch processes 1: Characterization of the nominal solution[J]. Computers & Chemical Engineering, 2003, 27(1): 1-26.
- [8] 胡静,陈恩红,王上飞,等.交互式遗传算法中收敛性及用户评价质量的提高[J].中国科学技术大学学报,2002,32(2):210-216.
- [9] 陈朝阳,张代胜,任佩红. CBR 诊断系统实例获取的合成相似性度量方法[J].机械工程学报,2004,40:48-52.

(上接第249页)

### 参考文献:

- [1] Rashid-Farrokhi F, Liu K J R, Berenstein C A, et al. Wavelet based multi-resolution local tomography[J]. IEEE Trans Image Process, 1997, 6(10): 1412-1430.
- [2] Kovacevic J, Vetterli M. Nonseparable Multidimensional Perfect Reconstruction Filter Banks and Wavelet Bases for  $R^n$ [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, 38(2): 533

-555.

- [3] 陈武凡.小波分析及其在图像处理中的应用[M].北京:科学出版社,2002:113-118.
- [4] 汪元美.现代医学成像理论[J].浙江大学学报,2000(10):37-49.
- [5] Kak A C, Slaney M. Principles of Computerized Tomographic Imaging[J]. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001, 8(5): 718-723.