

C-B样条曲线的形状修改

宋丽平, 秦新强, 祁伟丽

(西安理工大学理学院, 陕西 西安 710054)

摘要:提出了控制C-B样条曲线形状修改的两种方法:修改控制参数和修改控制顶点。在分析C-B样条基函数导数曲线特性的基础上,得出了控制参数对曲线形状的作用,提出了调节控制参数修改曲线形状的方法;另一方面,运用约束优化方法,修改C-B样条的控制顶点,使得C-B样条曲线通过调整的控制顶点,使修改前后曲线的距离范数达到最小。

关键词:C-B样条曲线;形状修改;控制参数;控制顶点;约束优化

中图分类号:TP391

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2008)07-0122-04

Shape Modification of C-B-spline Curves

SONG Li-ping, QIN Xin-qiang, QI Wei-li

(School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In this paper, two methods of changing the control parameter and changing control points are presented for the shape modification of C-B-spline curves. The relation between C-B-spline curves and the control parameter is obtained based on the analysis of the derivative C-B-spline basis functions. Furthermore, presents a new method constrained optimization based on changing the control points of the curves. By this method, modify control points of the original C-B-spline curves to satisfy the given constraints and modify the shape of the curves optimally.

Key words: C-B-spline curve; shape modification; control parameter; control points; constrained optimization

0 引言

C-B样条是一种新颖的曲线、曲面造型方法^[1-3],在保持B样条方法许多优点的基础上,能够方便、简洁、精确地构造二次曲线曲面,与NURBS(non-uniform rational B-splines)相比,C-B样条具有算法简单、节省存储空间、运算速度快、参数选择容易等特点。

曲线的设计和修改一直是计算机图形学、CAD/CAM和数控技术领域最重要的研究主题之一。文献[4]提出了NURBS曲线外形修改的两种方法:基于控制顶点和基于权因子的修改。文献[5,6]给出了同时修改控制顶点和权,改变曲线外形的方法。文献[7,8]分别给出了NURBS曲线和曲面几何约束修改的新方法。

基于上述研究成果,针对C-B样条曲线的形状控制进行了深入的研究和分析,并提出了通过修改控

制参数和控制顶点来改变C-B样条曲线形状的两种有效方法。

1 C-B样条基函数及其性质

C-B样条曲线是指用 $[\sin t \cos t \ 1]$ 代替三次均匀B样条曲线方程的基 $[t^3 \ t^2 \ t \ 1]$ 而构成的曲线。其定义用矩阵形式表示为:

$$P_i(t) = B_0(t) \times b_i + B_1(t) \times b_{i+1} + B_2(t) \times b_{i+2} + B_3(t) \times b_{i+3} = \frac{1}{2\alpha(1-C)} (\sin t \cos t \ 1) \cdot \begin{bmatrix} C & -(1+2C) & 2+C & -1 \\ -S & 2S & -S & 0 \\ -1 & 1+2C & -(1+2C) & 1 \\ \alpha & -2\alpha C & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ b_{i+2} \\ b_{i+3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 $0 < \alpha \leq \pi$, $0 < t \leq \alpha$, $S = \sin \alpha$, $C = \cos \alpha$, $i = 0, 1, \dots, n-1$; $b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, b_{i+3}$ 为C-B样条曲线的控制顶点,且

$$B_0(t) = \frac{(\alpha - t) - \sin(\alpha - t)}{2\alpha(1 - C)},$$

$$B_1(t) = B_3(t) - 2B_0(t) + \frac{\alpha - t}{\alpha},$$

$$B_2(t) = B_0(t) - 2B_3(t) + \frac{t}{\alpha},$$

收稿日期:2007-10-15

基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(02JK048);西安理工大学
基金资助项目(108-220502)

作者简介:宋丽平(1981-),女,陕西人,硕士研究生,研究方向为计算机图形学及辅助几何设计。

$$B_3(t) = \frac{t - \sin t}{2\alpha(1 - C)}$$

称为C-B样条曲线的基函数。

设 α 保持不变, t 从0变化到 α ,就得到C-B样条基函数关于 t/α 图形(见图1),在图1中,分别以 $\alpha = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ 和 π 时基函数曲线作为研究对象。则从C-B样条基函数与三次均匀B样条基函数的图形中可以得出C-B样条基函数具有以下性质:

(1) C-B样条基函数的图形与均匀B样条基函数的图形类似, $B_3(t)$ 和 $B_0(t)$, $B_2(t)$ 和 $B_1(t)$ 是关于 $t/\alpha = 1/2$ 对称,当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,

C-B样条基函数十分接近均匀B样条基函数;

(2) 当 $t = 0$ 时, $B_3(t) = 0$,C-B样条曲线通过前三个控制顶点 b_i, b_{i+1}, b_{i+2} ;当 $t = \alpha$ 时, $B_0(t) = 0$,C-B样条曲线通过后三个控制顶点 $b_{i+1}, b_{i+2}, b_{i+3}$;

(3) 随着 α 的增加,对于相同的 t/α , $B_3(t)$ 和 $B_0(t)$ 的增加, $B_2(t)$ 和 $B_1(t)$ 减少,曲线受 b_{i+1}, b_{i+2} 的作用减弱,曲线变得扁平;当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,曲线越来越凸,并接近均匀B样条曲线。

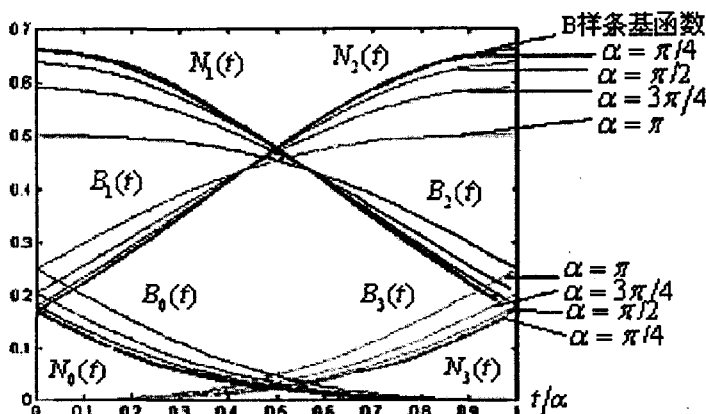


图1 C-B样条基函数图形

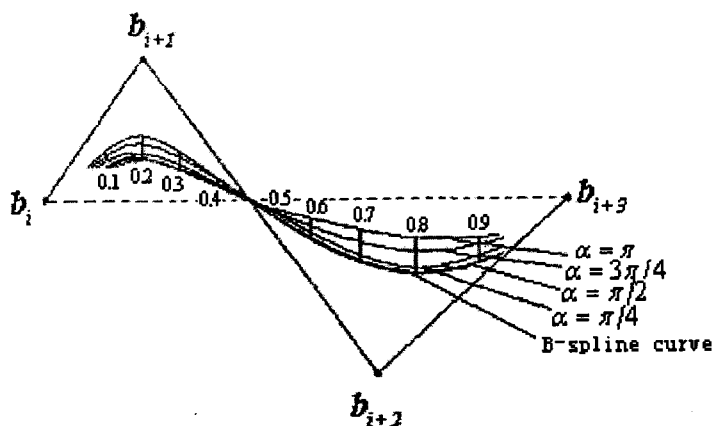


图2 控制顶点不变, α 变化时得到的一族C-B样条曲线

2 控制参数 α 的作用

控制参数 α 的引入,使得C-B样条方法具有比B样条方法更强的曲线表达能力。当4个控制顶点保持不变, α 在 $(0, \pi)$ 变化时,可获得一族C-B样条曲线,见图2。

当 $k = t/\alpha$ ($0 \leq k \leq 1$) 固定, α 变化 $d\alpha$ 时,C-B样条曲线族上的任一点 $P_\alpha(\alpha, k)$ 所产生位移:

$$dP_\alpha(\alpha, k) = \left[\frac{d(B_0(\alpha, k))}{d\alpha} b_i + \frac{d(B_1(\alpha, k))}{d\alpha} b_{i+1} + \frac{d(B_2(\alpha, k))}{d\alpha} b_{i+2} + \frac{d(B_3(\alpha, k))}{d\alpha} b_{i+3} \right] d\alpha$$

$$0 < \alpha \leq \pi, 0 \leq k \leq 1$$

其中

$$\frac{d(B_0(\alpha, k))}{d\alpha} = \frac{[(1-k) - (1-k)\cos(\alpha - k\alpha)][2\alpha(1 - \cos\alpha)] - [2(1 - \cos\alpha) + 2\alpha(1 + \sin\alpha)][(\alpha - k\alpha) - \sin(\alpha - k\alpha)]}{[2\alpha(1 - \cos\alpha)]^2},$$

$$\frac{d(B_3(\alpha, k))}{d\alpha} = \frac{[(k - k\cos k\alpha)][2\alpha(1 - \cos\alpha)] - [2(1 - \cos\alpha) + 2\alpha(1 + \sin\alpha)][(k\alpha - \sin k\alpha)]}{[2\alpha(1 - \cos\alpha)]^2},$$

$$\frac{d(B_1(\alpha, k))}{d\alpha} = \frac{[(k - k\cos k\alpha)][2\alpha(1 - \cos\alpha)] - [2(1 - \cos\alpha) + 2\alpha(1 + \sin\alpha)][(k\alpha - \sin k\alpha)]}{[2\alpha(1 - \cos\alpha)]^2} -$$

$$\frac{[(1-k) - (1-k)\cos(\alpha - k\alpha)][\alpha(1 - \cos\alpha)] - [(1 - \cos\alpha) + \alpha(1 + \sin\alpha)][(\alpha - k\alpha) - \sin(\alpha - k\alpha)]}{[\alpha(1 - \cos\alpha)]^2},$$

$$\frac{d(B_2(\alpha, k))}{d\alpha} =$$

$$\frac{[(1-k) - (1-k)\cos(\alpha - k\alpha)][2\alpha(1 - \cos\alpha)] - [2(1 - \cos\alpha) + 2\alpha(1 + \sin\alpha)][(\alpha - k\alpha) - \sin(\alpha - k\alpha)]}{[2\alpha(1 - \cos\alpha)]^2} -$$

$$\frac{(k - k\cos k\alpha)[\alpha(1 - \cos\alpha)] - [(1 - \cos\alpha) + \alpha(1 + \sin\alpha)][(k\alpha - \sin k\alpha)]}{[\alpha(1 - \cos\alpha)]^2} + k$$

根据基函数对称性, $d(B_3(\alpha, k))/d\alpha$ 与 $d(B_0(\alpha, k))/d\alpha$ 以及 $d(B_2(\alpha, k))/d\alpha$ 与 $d(B_1(\alpha, k))/d\alpha$ 关于 α 的图形是相对于 $k = 1/2$ 对称的, 因为 $d(B_0(\alpha, k))/d\alpha$ 和 $d(B_1(\alpha, k))/d\alpha$ 和 α 有较好的线性特征, 由此可以得到 α 控制曲线形状的近似计算方法。

设 4 个控制顶点固定, $k = t/\alpha$ 为 $(0, 1)$ 内的任意值, m, n 为相应的均匀 B 样条曲线和 $\alpha = \pi$ 的 C-B 样条曲线上的点, 则可以近似地认为, 以控制参数为 α 的 C-B 样条曲线上的点位于连线 mn 上 (见图 3), 且满足

$$\|ms\| : \|sn\| = (\alpha/\pi)^2 : 1 - (\alpha/\pi)^2 \quad (2)$$

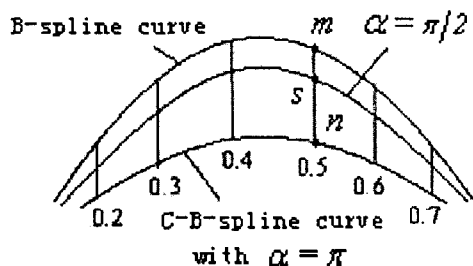


图 3 m, n 和 s 的位置关系

这一近似方法一方面可以将 α 对曲线的作用用直观的方式表达出来, 另一方面又为通过调节控制参数 α 来修改曲线的形状提供了方便。

3 调节控制参数 α 来修改曲线的形状

设 4 个控制顶点的位置保持不变, 当 α 增加时, 曲线靠向相应的均匀 B 样条曲线, 当 α 减小时, 曲线靠向相应的 $\alpha = \pi$ 的 C-B 样条曲线。曲线的整个调节范围是均匀 B 样条曲线和 $\alpha = \pi$ 的 C-B 样条曲线的区域。

假设一条控制参数为 α 的 C-B 样条曲线上 $t = k\alpha$ 的一点 s , 欲将该点产生一个位移 dj 到 s^* , s 和 s^* 在连接相应参数的均匀 B 样条曲线和 $\alpha = \pi$ 的 C-B 样条曲线上的点间的连线 $C(K)P_\pi(k\pi)$ 上 ($C(K)$ 为均匀 B 样条曲线), 单位矢量为 $j = (C(k) - P_\pi(k\pi))/|C(k) - P_\pi(k\pi)|$, 以靠近均匀 B 样条曲线为正, 位移大小为 d , 这可以通过调节控制参数 α 的值来实现。若精度要求不是很高, 可按式 (2) 来近似求得改变后的 α^* 的值。

曲线形状修改前:

$$s = (1 - \alpha/\pi)^2 P_\pi(k\pi) + (\alpha/\pi)^2 C(K)$$

曲线形状修改后:

$$s^* = s + dj = (1 - (\alpha^*/\pi)^2) P_\pi(k\pi) + (\alpha^*/\pi)^2 C(K)$$

于是得到新的控制参数

$$\alpha^* = \pi \sqrt{(\alpha/\pi)^2 - d/|C(k) - P_\pi(k\pi)|} \quad (3)$$

若位置精度要求很高, 则可将 α^* 的值带入 C-B

样条曲线方程中, 通过交互修改精确求得新的控制参数的值。

上述情况是指已知由曲线上一点 s , 由于位置改变 dj , 而使控制参数从 α 变为 α^* 。在实际的工程曲线曲面设计中, 经常遇到另一种情况时, 控制顶点给定, 要求通过选择 α 的值, 让曲线通过某一指定的点 r 。根据上面对 α 作用的分析, 只要 r 位于均匀 B 样条曲线和 $\alpha = \pi$ 的 C-B 样条曲线之间的区域, 就可以通过选择合适的 α 值, 使得 C-B 样条曲线通过点 r 。

首先反求 k 值。估计点 r 处的 k 值, 作一系列在该值附近的 $C(K)P_\pi(k\pi)$ 线, 选取容许误差范围内的 k 值; 然后计算 $d = rP_\pi(k\pi)$, 这样点 r 以点 $P_\pi(k\pi)$ 为参考, 代入 (3) 式, 即可求得控制参数:

$$\alpha^* = \pi \sqrt{1 - d/|C(k) - P_\pi(k\pi)|}$$

将求得的 α^* 代入 C-B 样条曲线方程, 再可以通过交互修改的方法来提高精度。

4 调节控制顶点来修改曲线的形状

在设计和表示 C-B 样条曲线时, 也可以通过调整特征多边形的位置来修改曲线的形状, 直到获得满意的结果。设 S 为第 i 段 C-B 样条曲线上的点, 其对应的参数 t 的值为 t_s , T 为调整后要通过的目标点, 为了使曲线通过目标点 T , 必须对曲线的控制点进行修正。由于 C-B 样条曲线的局部性, 不需要对曲线的所有控制点进行修正, 只需修正与该段曲线相邻近的曲线段上的控制点即可。由 C-B 样条曲线的性质可知, 第 i 段 C-B 样条曲线由 $i+3$ 个控制顶点所决定。若 $i=0$, 将影响第 $i, i+1, i+2, i+3$ 段 C-B 样条曲线。

在实际工程应用中, 常采用约束优化的方法通过调节控制顶点来修改曲线的形状, 方法如下:

假定要调整的点在第 i 段 C-B 样条曲线上, 并假设控制点 b_{i+1} 的修正向量为 $\epsilon_{i+l} = (\epsilon_{i+l}^x, \epsilon_{i+l}^y, \epsilon_{i+l}^z)^T$ ($l=0, 1, 2, 3$), 则修正后的 C-B 样条曲线方程组为:

$$\begin{cases} \overline{P_{i-k}}(t) = P_{i-k}(t) + \sum_{l=k}^3 \epsilon_{i-k+1} B_l(t) \\ 1 \leq k \leq j, 1 \leq j \leq 3 \\ \overline{P_i}(t) = P_i(t) + \sum_{l=0}^3 \epsilon_{i+1} B_l(t) \\ \overline{P_{i+k}}(t) = P_{i+k}(t) + \sum_{l=0}^{3-k} \epsilon_{i+k+1} B_l(t) \end{cases}$$

定义曲线 $P_i(t)$ 和 $\overline{P_i}(t)$ 的距离范数 $d(P_i(t), \overline{P_i}(t))$ 为 $d(P_i(t), \overline{P_i}(t)) = \int_0^1 (P_i(t) - \overline{P_i}(t))^2 dt$, 又曲线 $P_i(t)$ 和 $\overline{P_i}(t)$ 之间所夹面积应为: $S = \int_0^1 |P_i(t) - \overline{P_i}(t)| dt$

$(t), \bar{P}_i(t)|dt$, 容易得: $S \leq d(P_i(t), \bar{P}_i(t))^{1/2}$, 若能使所定义的距离范数达到最小, 则可使 S 尽可能的小, 另外这样定义距离范数也是为了便于后面的计算。

由于目标曲线过 T , 所以曲线满足: $T = \bar{P}_i(t_s) =$

$$\sum_{l=0}^3 (b_{i+1} + \epsilon_{i+1}) B_l(t_s)$$

用约束优化的方法来确定 $\epsilon_{i+l} (l=0, 1, 2, 3)$, 使之满足:

$$\sum_{l=0}^m \int_0^1 (P_i(t) - \bar{P}_i(t))^2 dt = \text{Min} \quad (m=0, 1, \dots, 6,$$

表示第 m 段 C-B 样条曲线)

由于 C-B 样条曲线的局部改动不会对所有段的曲线有所影响, 所以只需考虑有影响的曲线段最多为 7 段, 即有:

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=k}^3 \epsilon_{i-k+1} B_l(t) \right)^2 + \left(\sum_{l=0}^3 \epsilon_{i+1} B_l(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=0}^{3-k} \epsilon_{i+k+1} B_l(t) \right)^2 \right) dt = \text{Min}$$

用拉格朗日乘法作:

$$L = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=k}^3 \epsilon_{i-k+1} B_l(t) \right)^2 + \left(\sum_{l=0}^3 \epsilon_{i+1} B_l(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=0}^{3-k} \epsilon_{i+k+1} B_l(t) \right)^2 \right) dt + \lambda (T - \bar{P}_i(t_s))$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 为一常量。由 $\frac{\partial}{\partial \epsilon_{i+1}^x} (L) =$
 $\frac{\partial}{\partial \epsilon_{i+1}^y} (L) = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{i+1}^z} (L) = 0$, 可以得到关于未知量 $\epsilon_{i+l} (l=0, \dots, 3)$ 和 λ 的方程组:

$$\begin{cases} T = S + \sum_{l=0}^3 \epsilon_{i+1} B_l(t_s) \\ 2 \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=k}^3 \epsilon_{i-k+1} B_l(t) \right) B_q(t) + \sum_{l=0}^3 \epsilon_{i+1} B_l(t) B_p(t) + \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=0}^{3-k} \epsilon_{i+k+1} B_l(t) \right) B_r(t) \right) dt \right) = \lambda B_p(t_s) \\ p=0, 1, 2, 3 \quad q=k, \dots, 3 \\ r=0, \dots, 3-k \end{cases}$$

该方程组中有 15 个变量和 15 个方程, 所以可以通过解上述方程组得到 b_{i+1} 的修正向量 $\epsilon_{i+l} (l=0, \dots, 3)$ 。

可令 $a(p, q) = \int_0^1 B_p(t) B_q(t) dt$, $x = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i+3}, \lambda)^T$, $\beta = (0, 0, \dots, T - S)^T$, 则可得:

$$\begin{bmatrix} \sum_{p=0}^3 a(p, p) & \sum_{p=0}^2 a(p, p+1) & \sum_{p=0}^1 a(p, p+2) & a(0, 3) \\ \sum_{p=0}^2 a(p, p+1) & \sum_{p=0}^1 a(p, p) & \sum_{p=0}^0 a(p, p+1) & \sum_{p=0}^0 a(p, p+2) \\ \sum_{p=0}^1 a(p, p+2) & \sum_{p=0}^0 a(p, p+1) & \sum_{p=0}^0 a(p, p) & \sum_{p=0}^0 a(p, p+1) \\ a(0, 3) & \sum_{p=0}^0 a(p, p+2) & \sum_{p=0}^0 a(p, p+1) & \sum_{p=0}^0 a(p, p) \\ B_0(t_s) & B_1(t_s) & B_2(t_s) & B_3(t_s) \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -\frac{B_0(t_s)}{2} \\ -\frac{B_1(t_s)}{2} \\ -\frac{B_2(t_s)}{2} \\ -\frac{B_3(t_s)}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

令上述矩阵为 A , 则 $Ax = \beta$, 从中即可解得 $x = A^{-1}\beta$ 。这里共考虑调整 7 段曲线, 对实际情况可做相

应的调整。图 4 中折线代表原控制顶点构成的特征多边形, 原图由实线绘制, 修正后的已在图上标出。

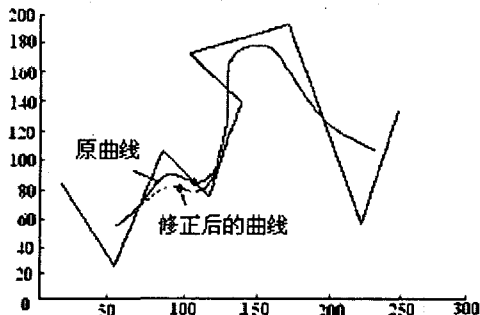


图 4 多分段 C-B 样条时单点约束

5 结束语

通过调节控制参数 α 来修改曲线形状, 不影响曲线首末端的位置和切矢方向, 在多段 C-B 样条曲线 G^1 拼接时, 调节控制参数 α 不会破坏各段曲线间原有的连续性; 通过运用约束优化方法及 C-B 样条曲线的性质, 对 C-B 样条曲线的形状进行了局部修改, 把问题转化成用拉格朗日方程求极值的数学模型, 使得 C-B 样条曲线通过调整的控制顶点, 这为曲线形状修正提供了一种新的思路。由于具有局部性, 故曲线形状修正较快, 可用于计算机辅助设计。

参考文献:

- [1] Zhang Ji-wen. C-Curves: an extension of cubic curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(3): 199-217.
- [2] Zhang Ji-wen. Two different forms of C-B-splines[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(1): 31-41.
- [3] Zhang Ji-wen. C-Bezier curves and surfaces[J]. Graphical Models and Image Processing, 1999, 61(1): 2-15.
- [4] Piegl L. Modifying the shape of rational B-splines, Part 1: curves[J]. Computer Aided Design, 1989, 21(8): 509-518.
- [5] Au C K, Yuen M M F. Unified approach to NURBS curve shape modification[J]. Computer Aided Design, 1995, 27(2): 85-93.
- [6] Sanchez R J. A simple technique for NURBS shape modification[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1997, 17(1): 52-59.
- [7] Hu Shi-min, Zhou Den-wen, Sun Jia-guang. Shape modification of NURBS curves via constrained optimization[C]//In: Proceedings of the CAD/Graphics'99. Shanghai: WenHui Publishers, 1999: 958-962.
- [8] Hu Shi-min, Li You-fu, Ju-tao. Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints[J]. Computer Aided Design, 2001, 33(12): 903-912.