

# 基于 Catmull - Clark 细分的新细分算法的研究

王其华, 孙立鏊

(哈尔滨理工大学 计算机科学与技术学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘 要:**提出一种四边形网格细分算法:每细分一次四边形网格,其数目增加为原来的两倍,细分二次结果相当于一次二分细分,采用边数缓慢增长的策略,使生成的曲面光滑连续。该算法生成曲面在规则点具有  $C^2$  连续性,在非规则点具有  $C^1$  连续性。该算法对网格几何操作简单,所得网格数据量增长相对缓慢,适合 3D 图像重构及网络传输等应用领域。由于文中细分算法对初始网格的拓扑变更,因此第一次细分会产生扭曲现象,但后面的细分会逐步光滑。

**关键词:**细分算法;四边形网格;非规则点

**中图分类号:**TP391

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2008)03-0040-03

## Research on New Subdivision Scheme Method for Catmull - Clark Subdivision

WANG Qi-hua, SUN Li-juan

(Sch. of Computer, Harbin University of Science & Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract:** A new stationary subdivision scheme is presented for quadrilateral meshes. In contrast to the usual dyadic splitting operation, the number of quadrilaterals increases in every step by a factor of 2. By using the number slow growth strategy, it causes the production the curved surface to be smooth continuously. Applying the subdivision twice is equivalent to a dyadic subdivision. The resulting surface is  $C^2$  continuous for regular vertices and  $C^1$  continuous for extraordinary vertices. The simplicity in geometric operation and the slow topological refinement make the subdivision scheme more suitable for many applications, such as 3D image reconstruction and network transmission. Because this article subdivides the algorithm to the initial grid analysis situs change, therefore the first thin branch has the distortion phenomenon, but the behind thin branch is gradually smooth.

**Key words:** subdivision scheme; quadrilateral meshes; extraordinary vertex

## 0 引 言

曲面造型方法一直以来都是计算机图形学领域的研究重点之一,它主要研究在计算机图像系统的环境下对曲面的表示、设计、显示和分析等。网格细分<sup>[1]</sup>(Subdivision)是曲面的一种表示方法,是曲面造型的一个分支,也是曲面造型的研究重点之一。细分曲面造型方法实际上是从一个被称为控制网格的多面体开始的,递归地计算新网格上的每个顶点,这些顶点都是其上一细分级网格上某几个顶点的加权平均。近年来国内外对细分算法的研究有了很大的进展,主要体现在从常规的三角网格、四角网格向六角网格以及任意形状网格的过渡。

细分算法包括对新网格形成点的拓扑连接及顶点几何定位两个步骤,常用的细分算法主要基于四边形或三角形网格。在 1978 年, Catmull 等用双三次 B 样条建立了任意四边形网格的细分算法。1987 年, Loop 用三方向 Box 样条构造了任意三角形网格的二分细分算法<sup>[2]</sup>。随后, Reif 和 Zorin 的关于细分曲面的收敛性及光滑性分析为细分曲面造型技术奠定了理论基础,极大地推动了细分算法的深入研究和广泛应用。目前,通常使用的细分算法都是基于二分细分的,每细分一次,面数增加为原来的 4 倍,边数增加为原来的 2 倍。数据量的膨胀速度<sup>[3]</sup>限制了它的应用领域,如 3D 信号的网络递进传输等。

近年来, Kobbelt 等提出了三角形网格的  $\sqrt{3}$  细分算法,用这种方法每细分一次,三角形网格数量增加为原来的 3 倍,细分两次相当一次三分细分再附加一个旋转。 Velho 提出的 4-8 细分算法同时具有四边形网格<sup>[4]</sup>和三角形网格<sup>[5]</sup>的特性,每细分一次,散乱数据<sup>[6]</sup>

收稿日期:2007-06-14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60173055)

作者简介:王其华(1979-),男,山东潍坊人,硕士研究生,研究方向为计算机图形学;孙立鏊,教授,博士生导师,研究方向为计算机图形学与 CAD。

量增长为原来的 2 倍,但网格拓扑相对复杂,需要大量的预处理工作。

文中提出的细分算法具有几何结构简单、数据增长相对缓慢和预处理结构简单等优点。

## 1 定义及术语

定义 1 对于四边形网格  $M$  中的任一顶点  $v$ , 如果  $v$  为内部顶点且价不等于 4 或  $v$  为边界顶点且价不等于 3 或 2, 则称  $v$  为奇异顶点。非奇异顶点称为正则顶点。

定义 2 权图(Masks)表示旧控制点计算新控制点规则的映射,其中新控制点在映射中用黑点表示,在每个旧控制点旁边的数字代表细分系数。

定义 3 奇点(Odd Vertices)是在每一级细分中,按照某种细分规则所有新生成的点。在三角网格中,奇点也就是边点,实际上是将每条边的中点作为一个新点重新计算新的位置所得到的点。

定义 4 偶点是在每一级细分中,所有从上一级控制点继承得到的点。

## 2 细分方法

一般情况下,对于几何网格细分算法的分类包括以下 4 个标准:

- (1)生成网格的类型(三角网格和四角网格)。
- (2)细分规则的类型(面分裂和点分裂)。
- (3)算法是逼近型还是插值型。
- (4)规则曲面的极限曲面光滑性( $C^1$ ,  $C^2$  等)。

文中细分方法只适用于四边形网格,因此必须先进行预处理,把一般多边形网格转变为四边形网格。文中使用两种转化方法,第一种转化方法是基于面剖分的,描述如下:首先求取每个面的重心和此面每条边的中点,然后连接重心和每条边的中点,这样就完成了多边形向  $n$  个四边形的转化。此转化方法虽然使拓扑信息改变较小但使面数增加过多,但有在边界不出现三角形的优点(和第二种方法相比),即全部转变为四边形。第二种转化方法是基于对偶的,描述如下:首先计算每个面的重心,然后通过此重心点连接所在面的每个顶点构造新边,连接完后去掉原有网格的边(保留边界边)。

经过这种方法的处理,除了边界为三角形外,其余全为四边形网格。对边界三角形的细分方法在下一节详细描述。此方法虽然使面数增加较少但使拓扑信息改变较大。

### 2.1 拓扑剖分

首先描述拓扑剖分,即拓扑连接规则。通过在四

边形中心插入一新点(对边界三角形新点为边界边的中点)来实现四边形的一到四剖分(边界三角形为一到二剖分)。这样通过新点和其周边老点连接形成 4 个新边,然后去掉老边(边界边除外),这样就完成了一次网格的细分。容易看出一次细分使面数大约增加为原来的二倍,二次细分相当于一次二分细分。通过分析容易发现新插入点的边数为 4,这样经过细分除从上层继承下来的非规则点和边界点外,其余全为规则点。

### 2.2 几何定位规则

规则点的细分算法,设四边形的 4 个顶点按顺时针的方向依次为  $v_1, v_2, v_3, v_4$ 。则其新面点的计算公式为:

$$V = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3 + \frac{1}{4}v_4$$

在一个田字形网格中,设右下方的顶点为  $v_1$ , 逆时针方向依次为  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ , 中间点为  $v_9$ , 则新顶点的计算公式为:

$$V = \frac{1}{64}(v_1 + v_3 + v_5 + v_7) + \frac{3}{32}(v_2 + v_4 + v_6 + v_8) + \frac{9}{16}v_9$$

然后考虑非规则点的处理,由于边数不为 4,因此其模板不能直接由三次 B 样条的张量积得到。采用三次平均的方法。设待更新的非规则点为  $P$ , 其连接边数为  $n$ , 四边形  $PP_iQ_iP_{i+1}$  为其所在的一个四边形,如图 1 所示。

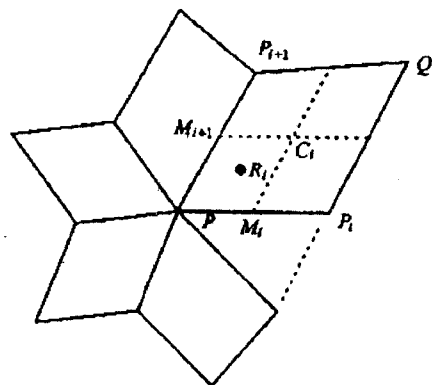


图 1 非规则点的图示

$$C_i = \frac{1}{4}(P + P_i + Q_i + P_{i+1}), 0 \leq i \leq n \quad (1)$$

$$M_i = \frac{1}{2}(P + P_i), 0 \leq i \leq n \quad (2)$$

$$M_{i+1} = \frac{1}{2}(P + P_{i+1}), 0 \leq i \leq n \quad (3)$$

然后计算四边形  $PMCM$  的重心

$$R_i = \frac{1}{4}(P + M_i + C_i + M_{i+1}) \quad 0 \leq i \leq n \quad (4)$$

把式(1)~(3)代入式(4),得

$$R_i = \frac{9}{16}P + \frac{3}{16}P_i + \frac{3}{16}P_{i+1} + \frac{1}{16}Q_i, 0 \leq i \leq n$$

最后对所有的  $R_i$  求平均,即得到非规则点  $P$  的更新规则:

$$P' = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i = \frac{9}{16}P + \frac{3}{8n}P_i + \frac{1}{16n} \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \quad (5)$$

如果初始四边形网格具有边界,如前所述,细分一次后在边界出现三角形,因此第二次细分时需要对这些三角形进行特殊处理,首先给出边界三角形新面点的计算方法,如图 2 所示,不妨假设边界三角形为  $PP_iP_{i+1}$ ,新面点为  $S_i$ ,则其计算公式为:

$$S_i = \frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}P_{i+1}$$

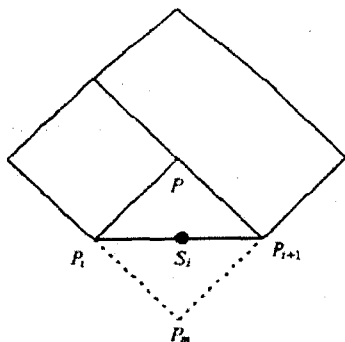


图 2 边界三角形边界的情况

由于细分二次相当于一次二分细分,因此细分的光滑性等同于其所对应的二分细分的光滑性,因为三次 B 样条所产生的细分曲线是  $C^2$  连续的,所以其张量积所产生的细分曲面对规则四边形网格也是  $C^2$  连续的,对于不规则点,其细分规则是采用三次平均的方法得到的,因此不规则点至少具有  $C^1$  连续性。

### 3 算法结果分析

文中给出了一个例子,与 Catmull Clark(C-C)算法作了比较。从实验中可以看出,用文中算法细分二次产生的效果和 C-C 算法细分一次的效果几乎没有差别(如图 3,4 所示)。由此可以得知,文中算法所产生细分曲面的光滑性和 Catmull Clark 细分曲面的光滑性没有明显区别,这也证实了光滑性分析,即文中细分

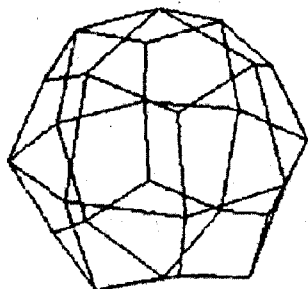


图 3 Catmull-Clark 细分 1 次

算法和 C-C 细分算法一样,对规则点具有  $C^2$  连续性,对于非规则具有  $C^1$  连续性。文中细分算法的一个不足就是第一次细分产生的结果扭曲,但从第一次细分开始曲面越来越光滑,达到了预期的效果。从上例容易发现,文中细分算法最大的优点就是网格几何操作简单,网格数据量增长相对缓慢,因此更适合 3D 信号网络传输等应用领域。

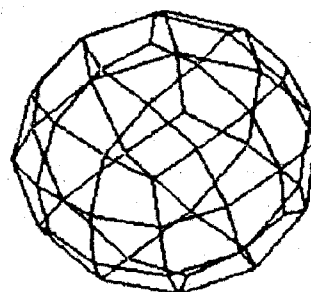


图 4 文中算法细分 2 次

### 4 结 论

针对传统的网格二分细分算法数据量增长较快的问题,给出了一种基于四边形网格的细分算法,该算法不仅具有 4-8 细分算法所拥有的数据量增长相对缓慢的优点,还具有细分算法几何操作简单有效的特点。由于文中细分算法对初始网格的拓扑变更,因此第一次细分会产生扭曲现象,但后面的细分会逐步光滑。

今后研究工作的重点是保持初始网格的几何特性,实现简单可行的几何操作,使得细分数据量增长缓慢。

#### 参考文献:

- [1] Zorin D, Schroder P. Subdivision for Modeling and Animation [C]//In: SIGGRAPH 2000 Course Notes, Course 23. New Orleans: ACM, 2000: 13-16.
- [2] Loop C. Smooth subdivision surfaces based on triangles[D]. Utah: University of Utah, 1987.
- [3] Wang G J, Wang G Z, Zheng J M. Computer Aided Geometric Design[M]. Beijing: China Higher Education Press; Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [4] 王海霞, 孙玉文, 苏学成. 三角网格模型上的四边形曲线网生成新方法[J]. 工程设计学报, 2006(3): 45-47.
- [5] 李桂清, 马维银, 鲍虎军. 带尖特征的 Loop 细分曲面拟合系统[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(6): 1179-1185.
- [6] 殷浩, 戴光明. 散乱数据可视化研究[J]. 微机发展, 2005, 15(7): 7-10.