

基于提升小波的自适应阈值图像去噪

邢丹俊, 王继成

(同济大学 电子与信息工程学院, 上海 200331)

摘要:介绍了提升方法(Lifting Scheme)的基本原理,给出了用提升方法构造传统小波的实现方法。在提升小波分解变换的基础上,研究一种自适应阈值的图像去噪方法——AdaptThr Shrink 去噪法。这种方法是基于 Bayes 框架,在不同子带和不同方向上选择不同的最佳阈值。结合软阈值法对图像进行去噪,与传统方法相比,此种方法提高了去噪后图像的峰值信噪比(PSNR),而且使图像更加清晰。基于提升小波的自适应阈值图像去噪法实现简单、计算速度快、去噪效果好。

关键词:小波变换;提升方法;阈值;图像去噪

中图分类号:TP317.4

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2008)0042-04

Adaptive Threshold Based on Lifting Wavelet Transform for Image Denoising

XING Dan-jun, WANG Ji-cheng

(College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 200331, China)

Abstract: Introduces basic principle of lifting scheme and presents method of construction of traditional wavelets via lifting scheme. An adaptive threshold based on lifting wavelet transform for image denoising is studied. This method is derived in a Bayesian framework and threshold is chosen according to different subbands and orientations. Comparing with traditional denoising methods, this method combined with soft threshold algorithm, can improve the PSNR more effectively and also makes denoised image more clearly. Adaptive threshold based on lifting wavelet transform, which can be computed fast with a simple implementation, has a good effect for image denoising.

Key words: wavelet transform; lifting scheme; threshold; image denoising

0 引言

在图像输入采样、转换和传输过程中,都极有可能会受到噪声的干扰。因此,为了后续更高层次的处理,很有必要对图像进行去噪。小波分析作为一种时频分析方法,具有良好的时频局部性,在信号去噪领域得到了广泛应用。提升方法(lifting scheme)是 Sweldens 和 Daubechies 等学者于 20 世纪 90 年代中期提出的关于小波构造的一种新方法^[1~3]。利用提升小波来构造传统小波,具有实现结构简单、运算速度快、节省缓存空间等优点,同时可以实现整数小波变换,更加有利于在硬件上的实现。

Donoho 和 Johnstone 在小波变换的基础上提出了小波阈值^[4]去噪的概念,并证明了此方法在 Besov 空间上可以得到其他任何线性估计都不可能达到的最佳估计值。小波阈值萎缩法认为比较大的小波系数一般

都是以实际信号为主,较小的小波系数则很大程度上是噪声,因此通过设定合适的阈值,在小波域内保留较大的系数,去除较小的系数来达到去噪的目的。

笔者在 Donoho 等人提出的去噪方法 Visu Shrink^[4,5]和 Grace Chang 等人提出的基于 Bayes 准则的去噪方法 Bayes Shrink^[6]的基础之上,研究了一种基于提升小波变换的自适应阈值图像去噪方法 Adapt-Thr Shrink,该方法是在不同子带和不同方向上通过选择不同的最佳阈值去噪,以期获得更快更好的效果。

1 基于提升方法的小波变换

1.1 提升方法

用提升方案构造小波的过程也就是把小波分解为提升步骤的过程,它使人们能够用一种简单的方法去解释小波的基本理论,而第一代小波变换都可以找到等效的提升方案。提升方案把第一代小波变换过程分为以下三个阶段:

(1)分裂(Split):采用懒(Lazy)小波变换,将原始信号 $\{X_n\}$ 分解成奇偶序列:

收稿日期:2007-05-15

作者简介:邢丹俊(1982-),男,江苏丹阳人,硕士研究生,研究方向为图像处理与小波分析;王继成,研究员,博导,研究方向为图像处理、软件工程。

$$s_l^0 = X_{2l}, d_l^0 = X_{2l+1} \quad (1)$$

(2) 预测(Predict): 对于一个局部相关性较强的信号, 它的奇偶序列也是高度相关的。因此, 知道其中一个, 就有可能用它在合理的精度范围内预测另外一个。通常根据偶序列预测奇序列, 其预测误差为:

$$d_l^k = d_l^{k-1} - P(s_l^{k-1}) \quad (2)$$

其中, $P(\cdot)$ 表示预测算子。这里将 $\{d_l^k\}$ 看作信号 $\{X_n\}$ 高频分量。预测过程为可逆过程, 由 $\{d_l^k\}$ 可以来恢复 $\{d_l^{k-1}\}$ 。

(3) 更新(Update): 利用奇序列来更新偶序列, 以期获得信号的低频分量:

$$s_l^k = s_l^{k-1} + U(d_l^k) \quad (3)$$

其中, $U(\cdot)$ 表示更新算子。更新过程也是可逆过程, 由 $\{s_l^k\}$ 可以来恢复 $\{s_l^{k-1}\}$, 进而恢复 $\{X_n\}$ 。

提升方案的正、反变换的过程如图 1 所示。

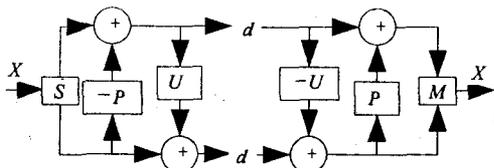


图 1 提升方案的正、反变换原理图

一个提升格式可以包含几步预测和更新, Daubechies 和 Sweldens 证明了任何经典小波变换都可以利用提升格式来实现^[1]。

1.2 用提升方法构造传统小波

多相表示法是表示调制矩阵特殊结构的一种方便的工具。滤波器 h 的多项位表示为:

$$h(z) = h_e(z^2) + Z^{-1}h_o(z^2) \quad (4)$$

其中, $h_e(z)$ 包含了 $h(z)$ 的偶系数, 而 $h_o(z)$ 包含 $h(z)$ 的奇系数, 即:

$$h_e(z) = \sum_k h_{2k}z^{-k} = \frac{h(z^{1/2}) + h(-z^{1/2})}{2} \quad (5)$$

$$h_o(z) = \sum_k h_{2k+1}z^{-k} = \frac{h(z^{1/2}) - h(-z^{1/2})}{2z^{-1}} \quad (6)$$

那就得到多项矩阵为:

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix} \quad (7)$$

于是:

$$P(z^2)^T = 1/2 \begin{bmatrix} h(z) & h(-z) \\ g(z) & g(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{bmatrix} \quad (8)$$

小波滤波器精确重构的条件可以写成:

$$P(z)\tilde{P}(z^{-1})^T = I \quad (9)$$

$P(z)$ 和 $\tilde{P}(z)$ 的行列式都是 Laurent 多项式。不失一般性, 不妨设 $\det(P(z)) = 1$ 。那么, 对于 $P(z)$, 则

总存在 Laurent 多项式 $u_i(z)$ 和 $p_i(z)$ 及非零常数 K , 使得:

$$P(z) = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix} \quad (10)$$

根据小波分解与重构的多项位表示, 对矩阵 $P(z)$ 可以运用 Euclidean 算法进行因式分解, 即可以给出小波变换的提升实现步骤。

基于提升的正向和逆向小波变换的流程图如图 2 所示。

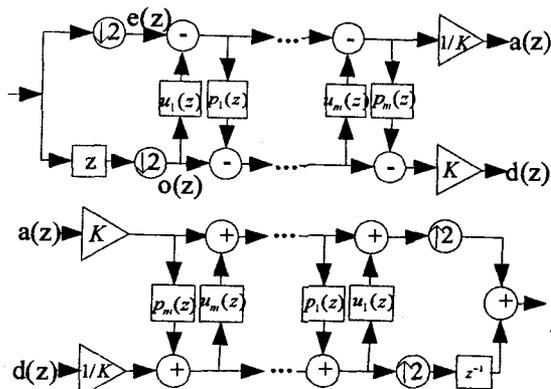


图 2 基于提升的正向和逆向小波变换的流程图

文中选取在信号处理中经常用到的 Daubechies (9/7) 小波, 研究其对应的提升步骤。运用 Euclidean 算法得到下式的多项矩阵分解:

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha(1+z) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\beta(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma(1+z) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\delta(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中:

$$\alpha \approx -1.586134342; \beta \approx -0.05298011854; \\ \gamma \approx 0.8829110762; \delta \approx 0.4435068522; \\ \zeta \approx 1.149604398$$

由此, 此种分解方式对应的 9/7 正向小波变换的提升实现算法为:

$$s_l^0 = x_{2l}; d_l^0 = x_{2l+1}; \\ d_l^1 = d_l^0 + \alpha(s_l^0 + s_{l+1}^0); \\ s_l^1 = s_l^0 + \beta(d_l^1 + d_{l-1}^1); \\ d_l^2 = d_l^1 + \gamma(s_l^1 + s_{l+1}^1); \\ s_l^2 = s_l^1 + \delta(d_l^2 + d_{l-1}^2); \\ s_l = \zeta s_l^2; d_l = d_l^2/\zeta \quad (12)$$

2 阈值的选择

2.1 自适应阈值的确定

通过小波阈值萎缩法来进行去噪, 最关键的步骤

就是确定最佳阈值 T 的大小。

目前最常用的确定阈值的方法是 Donoho 等人提出的 Visu Shrink 方法^[5]。在 Visu Shrink 方法中,最佳阈值 T 通过如下的公式选取:

$$T = \sigma \sqrt{2 \log N} \quad (13)$$

其中, σ 是噪声标准差, N 是小波系数中高频系数的个数。

Grace Chang 等人根据图像小波系数分布的特点,提出了一种基于 Bayes 准则的 Bayes Shrink^[6] 图像去噪方法,其最佳阈值 T 为:

$$T = \hat{\sigma}_{\text{noise}}^2 / \hat{\sigma}_{\text{signal}} \quad (14)$$

其中, $\hat{\sigma}_{\text{noise}}^2$ 是噪声信号方差 σ_{noise}^2 的估计, $\hat{\sigma}_{\text{signal}}$ 是图像信号标准差 σ_{signal} 的估计。

文中就是在以上基础上,研究一种基于不同子带、不同方向上的自适应阈值的确定方法,这里把它称作 AdaptThr Shrink 去噪法。

假设图像表示为 $\{f_{i,j}; i, j = 1, 2, \dots, N\}$, 因此,被噪声污染的图像就可以表示为:

$$\{g_{i,j} = f_{i,j} + \epsilon_{i,j}; i, j = 1, 2, \dots, N\} \quad (15)$$

其中,噪声 $\{\epsilon_{i,j}\}$ 与图像 $\{f_{i,j}\}$ 相互独立且服从正态分布。经小波变换以后,有:

$$\{W_{g_{i,j}} = W_{f_{i,j}} + W_{\epsilon_{i,j}}; i, j = 1, 2, \dots, N\} \quad (16)$$

其中, $W_{g_{i,j}}$ 表示含有噪声图像的小波系数, $W_{f_{i,j}}$ 表示原始图像的小波系数, $W_{\epsilon_{i,j}}$ 表示噪声的小波系数。

根据文献[6],在同一层上,噪声信号的标准差 σ_w 可由对角线方向小波细节系数 HH 进行估计:

$$\hat{\sigma}_w(K) = \frac{\text{Median}(|HH_K|)}{0.6745} \quad (17)$$

其中, $K = 1, 2, \dots, l$, l 表示小波分解的层数。

各方向上的细节系数 $W_{g_{i,j}}(1, K) \in \{LH_K\}$ 、 $W_{g_{i,j}}(2, K) \in \{HL_K\}$ 和 $W_{g_{i,j}}(3, K) \in \{HH_K\}$ 服从广义的高斯分布(Generalized Gaussian Distribution)^[6]。因此,带噪图像信号的方差可用下式估计:

$$\hat{\sigma}_w^2(D, K) = \frac{1}{N(K)^2} \sum_{i=1}^{N(K)} \sum_{j=1}^{N(K)} W_{g_{i,j}}^2(D, K) \quad (18)$$

其中, $D = 1, 2, 3$ 分别表示水平、垂直、对角线三个方向。由 $\sigma_w^2 = \sigma_w^2 + \sigma_w^2$, 就可以得到原始图像信号的标准差估计:

$$\hat{\sigma}_w(D, K) = \sqrt{\max(\hat{\sigma}_w^2(D, K) - \hat{\sigma}_w^2(K), 0)} \quad (19)$$

由此,可得到 AdaptThr Shrink 的阈值的表达式:

$$T(D, K) = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_w^2(K)}{\hat{\sigma}_w(D, K)} & \hat{\sigma}_w(D, K) \neq 0 \\ \max(|W_{g_{i,j}}(D, K)|) & \hat{\sigma}_w(D, K) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

2.2 阈值处理函数

阈值处理有硬阈值函数(Hard threshold)和软阈值函数(Soft threshold)^[4]两种。

硬阈值函数为

$$\eta(x) = \begin{cases} x & |x| > T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

硬阈值化即是使绝对幅值大于阈值 T 的小波系数 x 保留,绝对幅值小于阈值 T 的小波系数置为 0。

软阈值函数(也称作收缩(Shrinkage)函数)为

$$\eta(x) = \text{sgn}(x) \cdot \max(|x| - T, 0) = \begin{cases} x - T, & x \geq T \\ 0, & |x| < T \\ x + T, & x \leq -T \end{cases} \quad (22)$$

其中, $\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数。软阈值化即是将小波系数 x 的绝对值与阈值 T 进行比较,然后根据比较结果再向 0 进行收缩。

由于硬阈值函数在阈值 T 处的不连续,硬阈值化所得到的估计信号会产生附加振荡。相比,软阈值函数在 Besov 空间上更加接近极小极大准则的理想值,使去噪后的信号更加平滑。因此,文中采用的是软阈值函数。

3 实验和结果分析

为了验证文中方法的有效性,实验对分别加入 $\sigma = 10 \sim 25$ 高斯白噪声的“Lena”和“Girl”图像分别进行去噪处理,并且对去噪结果进行了对比和分析。实验采用峰值信噪比(PSNR, Peak Signal-to-Noise Ratio)作为性能评价指标,其表达式如下:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{255^2}{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\tilde{f}_{i,j} - f_{i,j})^2} \quad (23)$$

其中, $\{f_{i,j}\}$ 为原始图像, $\{\tilde{f}_{i,j}\}$ 是待评价图像。

文中研究的 AdaptThr Shrink 去噪法的实验步骤如下:

(1) 对加噪图像运用提升小波进行 l 层分解,提取各层的三个不同方向(水平、垂直、对角线)上的小波系数;

(2) 根据自适应阈值公式求出不同子带、不同方向上的最佳阈值;

(3) 运用软阈值公式,将水平、垂直、对角线三个方向上的小波系数进行软阈值化;

(4) 利用新的小波系数,运用提升小波的逆变换重构图像。

表 1 给出了 Daubechies(9/7)小波(Mallat 算法)和 9/7 提升小波的分解图像的时间对比结果。表 2、表 3

给出了噪声图像和在 9/7 提升小波变换的基础上分别采用 Visu Shrink 法、Bayes Shrink 和 AdaptThr Shrink 法去噪后图像的峰值信噪比。图 3 给出了用 9/7 提升小波将含噪“Lena”图像($\sigma=15$ 时)分解到第 3 层,采用不同去噪方法去噪后的图像。



图 3 “Lena”原始图像、噪声图像及 3 种去噪方法去噪后的图像

表 1 两种分解变换所需的时间(s)比较

	对“Lena”图像进行 3 层分解	对“Girl”图像进行 3 层分解
9/7 小波 (Mallat 分解)	0.0638	0.0656
9/7 小波 提升分解	0.0417	0.0429

由表 1 可清晰看到两种算法最直观的区别在于运算速度,提升算法比经典的 Mallat 算法速度提高 40% 左右。由表 2 和表 3 可看出,经 AdaptThr Shrink 方法去噪处理后的图像要比噪声图像的峰值信噪比改善很多,已达到了去噪的目的。和 Visu Shrink 法、Bayes Shrink 法相比,峰值信噪比也都有不同幅度的提高。AdaptThr Shrink 法要优于其他两种去噪方法,就是由于此种方法在不同子带、不同方向上确定不同的阈值,因此它更多地保留了原始图像的边缘信息。从图 3 可

看出,与其他两种方法相比,经过 AdaptThr Shrink 去噪法处理后的图像更清晰,去噪效果更好。

表 2 “Lena”含噪图像 3 种方法去噪后的峰值信噪比(dB)

	$\sigma=10$	$\sigma=15$	$\sigma=20$	$\sigma=25$
噪声图像	28.1058	24.5839	22.0852	20.1470
Visu Shrink 法	29.1573	27.0018	25.1732	23.6230
Bayes Shrink 法	30.9985	28.8925	27.2576	25.8571
AdaptThr Shrink 法	31.4312	29.1210	27.5462	26.3427

表 3 “Girl”含噪图像 3 种方法去噪后的峰值信噪比(dB)

	$\sigma=10$	$\sigma=15$	$\sigma=20$	$\sigma=25$
噪声图像	27.9708	24.8302	22.4252	21.3784
Visu Shrink 法	29.6071	27.7815	26.1932	24.7669
Bayes Shrink 法	31.1929	29.1230	27.8520	26.7716
AdaptThr Shrink 法	31.7235	29.7828	28.4671	27.4447

4 结 论

基于提升小波变换,研究了一种基于 Bayes 准则在不同子带和不同方向上的自适应阈值的去噪方法——AdaptThr Shrink 去噪法,有效地改善了图像质量,提高了峰值信噪比,使图像更加清晰。AdaptThr Shrink 去噪法可应用到图像的检测和识别系统中,通过实验数据和分析说明,该方法和软阈值法相结合能更加快速更加有效地去除噪声。

参考文献:

- [1] Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 1998,4(3):247-269.
- [2] Sweldens W. The lifting scheme: A custom - design construction of biorthogonal wavelets[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis,1996,3(2):186-200.
- [3] Sweldens W. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,1997,29(2):511-546.
- [4] Donoho. De - noising by soft - thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory,1995,41:613-627.
- [5] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika,1994,81:425-455.
- [6] Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2000,9(9):1532-1546.