

# 基于改进 Catmull - Rom 样条的图像缩放算法

江巨浪

(安庆师范学院 物理与电气工程学院, 安徽 安庆 246011)

**摘 要:** Catmull - Rom 样条函数具有  $C^1$  连续性性质与快速插值能力, 其每一个节点的导数值都是由其相邻的 2 个节点确定。文中通过相邻 4 个节点确定样条上各节点的导数值, 由此重新构造了 Catmull - Rom 样条以进一步减少插值误差。实验结果表明, 将这种改进的 Catmull - Rom 样条用于图像的缩放处理, 插值误差明显减少, 插值效率高, 适用于对图像缩放的质量与速度都有较高要求的场合。

**关键词:** 图像缩放; Catmull - Rom 样条; 插值误差; 插值效率

**中图分类号:** TP391.4

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673 - 629X(2007)04 - 0211 - 03

## Image Zooming Algorithm Based on the Improved Catmull - Rom Spline

JIANG Ju-lang

(School of Physics and Electrical Engineering, Anqing Teachers College, Anqing 246011, China)

**Abstract:** Catmull - Rom spline function has efficient interpolating ability and  $C^1$  continuity, and its derivative at each point is defined by the previous and next point. To further reduce the interpolation errors, use the values at the 4 neighboring points to define the first derivative, and rebuild a new kind of Catmull - Rom spline. The experiment results show that the image zooming based on the improved Catmull - Rom spline has much less interpolation errors and only a little increase in processing time, and may be used on those occasions where the high quality and high efficiency of image zooming are both required.

**Key words:** image zooming; Catmull - Rom spline; interpolation errors; interpolation efficiency

## 0 引言

图像的放大与缩小处理已在很多领域得到广泛应用。图像缩放处理目前主要采取基于插值的方法, 如近邻取样法、双线性插值方法、样条插值与 B 样条插值方法等<sup>[1~3]</sup>。在具有较高精度的图像放大方法中, 由于 B 样条插值方法具有较高的插值精度与很好的插值效果, 人们对其进行了较多的研究与应用。然而从另一方面看, B 样条本身并不具有可插值性, 当其应用于图像采样时, 需要通过已知节点反求控制顶点, 插值效率并不高。Catmull 与 Rom 构造的三次样条能够在拼接之后达到  $C^1$  连续<sup>[4,5]</sup>, 插值计算仅依赖于邻近的 4 个节点, 在插值效率上有较大优势, 因而在图像缩放处理上具有重要的应用价值。

文中通过改进传统的 Catmull - Rom 样条, 进一步

减少插值误差, 将其用于图像缩放处理具有运行速度快与输出图像质量高的特点。

## 1 改进 Catmull - Rom 样条函数

Catmull 与 Rom 样条函数在各节点处的导数是通过利用其前后 2 个节点的值直接计算出来的。在获得所有节点的导数之后, 利用每相邻 4 个节点的信息就可以构造一段经过中间两点的 3 次多项式函数, 并且所构造的每一段样条在拼接时达到  $C^1$  连续。设有节点  $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$ , 对应的值为  $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ , Catmull - Rom 样条函数对节点  $x_i$  处的一阶导数进行如下定义:

$$P'_i = \tau(P_{i+1} - P_{i-1}) \quad (1)$$

式中  $\tau$  称为形状因子, 当样条用于插值用途时,  $\tau = 0.5$  为最佳取值<sup>[6]</sup>, 此时式(1)所定义的  $P'_i$  正好等于由点  $(x_i, P_i)$  及其两侧的两点所确定的 2 次多项式函数在节点  $x_i$  的一阶导数, 如图 1(a) 所示。为了提高对  $P'_i$  的计算精度, 考虑更远一些节点对其产生的影响: 通过点  $(x_i, P_i)$  及其两侧的 4 点共同确定样条函数

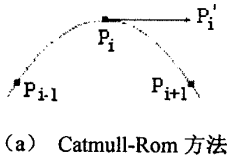
收稿日期: 2006 - 07 - 21

基金项目: 国家自然科学基金(60575023); 安徽省教育厅自然科学基金(2005KJ096)

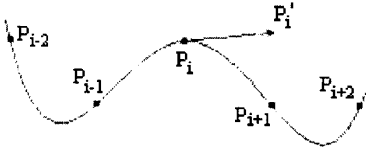
作者简介: 江巨浪(1967 -), 男, 安徽潜山人, 副教授, 研究方向为计算机图形学与图像处理。

在节点  $x_i$  的导数,如图 1(b) 所示。通过以上 5 个点可构造唯一的 4 次多项式函数:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad (2)$$



(a) Catmull-Rom 方法



(b) 文中方法

图 1 节点处的导数定义

考虑应用于图像处理的特殊性,令步长  $h = 1$ 。为简化计算过程,不妨令  $x_i = 0$ ,则 5 个节点坐标值依次为  $-2, -1, 0, 1$  和  $2$ ,在所有节点满足以下条件:

$$\begin{cases} f(-2) = P_{i-2} = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4 \\ f(-1) = P_{i-1} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \\ f(0) = P_i = a_0 \\ f(1) = P_{i+1} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ f(2) = P_{i+2} = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 \end{cases} \quad (3)$$

由上式可解得系数  $a_1 = \frac{1}{12}P_{i-2} - \frac{2}{3}P_{i-1} + \frac{2}{3}P_{i+1} - \frac{1}{12}P_{i+2}$ ,因此  $f(x)$  在  $x_i$  点的导数为:

$$f'(x_i) = f'(0) = a_1 = \frac{1}{12}P_{i-2} - \frac{2}{3}P_{i-1} + \frac{2}{3}P_{i+1} - \frac{1}{12}P_{i+2} \quad (4)$$

上式表明,可以利用 4 次插值多项式  $f(x)$  在  $x_i$  点的一阶导数值来定义 Catmull - Rom 样条在  $x_i$  点的一阶导数:  $P'_i = f'(x)$ ,即  $P'_i$  通过节点  $x_i$  两侧的两个节点的信息来计算得到,显然提高了 Catmull - Rom 样条对节点导数的计算精度。

接下来根据这种新的节点导数定义方法,重新构造 Catmull - Rom 样条函数。

设有一组步长为 1 的等距点列,任意相邻的 6 个节点的值依次为  $P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  和  $P_{i+3}$ ,在中间的两点  $(x_i, P_i)$  和  $(x_{i+1}, P_{i+1})$  之间构造第  $i$  段 3 次样条函数。设插值点坐标为  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,其对应的浮点坐标为  $t = x - x_i \in [0, 1]$ ,则该 3 次样条函数可表示为:

$$P(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 \quad (5)$$

显然,样条的端点应满足以下约束条件:

$$\begin{cases} P(0) = c_0 = P_i \\ P(1) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = P_{i+1} \\ P'(0) = c_1 = \frac{1}{12}P_{i-2} - \frac{2}{3}P_{i-1} + \frac{2}{3}P_{i+1} - \frac{1}{12}P_{i+2} \\ P'(1) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 = \frac{1}{12}P_{i-1} - \frac{2}{3}P_i + \frac{2}{3}P_{i+2} - \frac{1}{12}P_{i+3} \end{cases} \quad (6)$$

解以上方程可得样条函数的系数计算式:

$$\begin{cases} c_0 = P_i \\ c_1 = \frac{1}{12}P_{i-2} - \frac{2}{3}P_{i-1} + \frac{2}{3}P_{i+1} - \frac{1}{12}P_{i+2} \\ c_2 = -\frac{1}{6}P_{i-2} + \frac{5}{4}P_{i-1} - \frac{7}{3}P_i + \frac{5}{3}P_{i+1} - \frac{1}{2}P_{i+2} + \frac{1}{12}P_{i+3} \\ c_3 = \frac{1}{12}P_{i-2} - \frac{7}{12}P_{i-1} + \frac{4}{3}P_i - \frac{4}{3}P_{i+1} + \frac{7}{12}P_{i+2} - \frac{1}{12}P_{i+3} \end{cases} \quad (7)$$

通过上式对多项式系数计算方法的定义,就得到了改进的 Catmull - Rom 样条函数。不难看出,当该样条用于插值时,插值点两侧共有 6 个节点的值参与插值计算。

## 2 图像缩放算法

设输入图像是一个  $m \times n$  的数字图像。 $P_{i,j}$  ( $0 \leq i \leq m-1; 0 \leq j \leq n-1$ ) 表示输入图像中第  $i$  行、第  $j$  列像素的灰度值,它与像素平面上的二维点  $(i, j)$  相对应。为了完成对图像边界区域的插值运算,需要对输入图像的边界之外进行插值节点的补充。首先将矩阵  $P_1 = \{P_{i,j}; 0 \leq i \leq m-1; 0 \leq j \leq n-1\}$  扩充为  $P_2 = \{P_{i,j}; -1 \leq i \leq m; -1 \leq j \leq n\}$ ,其中采用外向插值法:  $P_{m,j} = 2P_{m-1,j} - P_{m-2,j}$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ),  $P_{i,n} = 2P_{i,n-1} - P_{i,n-2}$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ),  $P_{m,n} = P_{m,n-1} + P_{m-1,n} - P_{m-1,n-1}$ ,  $P_{0,j} = 2P_{1,j} - P_{2,j}$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ),  $P_{i,0} = 2P_{i,1} - P_{i,2}$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ),  $P_{0,0} = P_{1,0} + P_{0,1} - P_{1,1}$ 。然后,用相同的方法进一步再将  $P_2$  扩充为  $P_3 = \{P_{i,j}; -2 \leq i \leq m+1; -2 \leq j \leq n+1\}$ 。

设数字图像缩放后在水平与垂直方向的伸缩比分别为  $M$  倍与  $N$  倍,则输出图像中任一像素  $P(i', j')$  映射到输入图像中的对应坐标为  $(x, y): x = i'/M; y = j'/N$ 。由于  $(x, y)$  通常不为整数坐标,其颜色值可以通过对附近的  $6 \times 6$  个像素进行双向插值而得到。双向插值计算分为两步进行:先通过水平方向的插值

计算获得垂直分布的 6 个过渡插值节点的值,然后通过垂直方向的插值计算得到坐标  $(x,y)$  处的值,并将其赋给输出图像中的像素  $P$ 。具体算法的伪程序如下:

```
for(输出图像中的每一个像素  $P(i',j')$ )
{
    计算  $(i',j')$  映射到输入图像中的对应坐标  $(x,y)$ ;对  $x$  与  $y$  取整数得到  $i$  与  $j$ ,计算水平与垂直方向的插值浮点坐标:  $t_i$ 
     $= x - i; t_j = y - j$ 。
    for ( 整数  $k$  从 -2 到 3 )
    {
        在输入图像中以
         $P_{i-2,j+k}, P_{i-1,j+k},$ 
 $P_{i,j+k}, P_{i+1,j+k}, P_{i+2,j+k}$ 
        和  $P_{i+3,j+k}$  作为插值节点的值,以  $t_i$  为浮点坐标,用改进的 Catmull-Rom 样条函数进行插值计算,得到过渡插值节点的值,记为  $P_{j+k}$ 。
    }
    由前面计算出的
     $P_{j-2}, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, P_{j+2}$ 
    与  $P_{j+3}$  作为插值节点的值,以  $t_j$  为浮点坐标,用改进的 Catmull-Rom 样条函数进行插值计算,结果即为输入图像中坐标  $(x,y)$  的灰度值,将其赋给输出像素  $P(i',j')$ 。
}
```

3 实验结果与比较

在 Pentium4 微机上用 VC++ 6.0 实现了有关算法。为了检验图像缩放处理中使用改进的 Catmull-Rom 样条对减少插值误差所起的作用,分别使用双线性插值方法、Catmull-Rom 样条插值方法与改进的 Catmull-Rom 样条插值方法,将图 2(a)中的图像沿水平与垂直两方向都缩小为原来尺寸的 2/3,然后再采用相同的插值方法重新放大到原来的尺寸,插值方法的优劣可以通过恢复的图像与原始图像之间的误差来衡量。为了使插值误差可视化<sup>[6]</sup>,当恢复图像的像素灰度值与输入图像中对应像素的灰度差值的大小超过预设的阈值(文中图像灰度级为 256,阈值取 1),就将误差图像中相应位置的像素置为黑色,否则就置为白

色。图 2 中(b)至(d)依次为采用三种插值方法产生的误差图像,误差像素个数统计的结果分别为 9753,867 与 573,主要集中在灰度值变化梯度大的区域。可以看出,双线性插值方法的误差像素个数远高于其它两种方法。在 Catmull-Rom 样条基础上,采用改进的 Catmull-Rom 样条可使误差像素个数下降约 34%。也就是说,基于改进 Catmull-Rom 样条的图像缩放处理具有更小的插值误差,输出的图像质量更好。

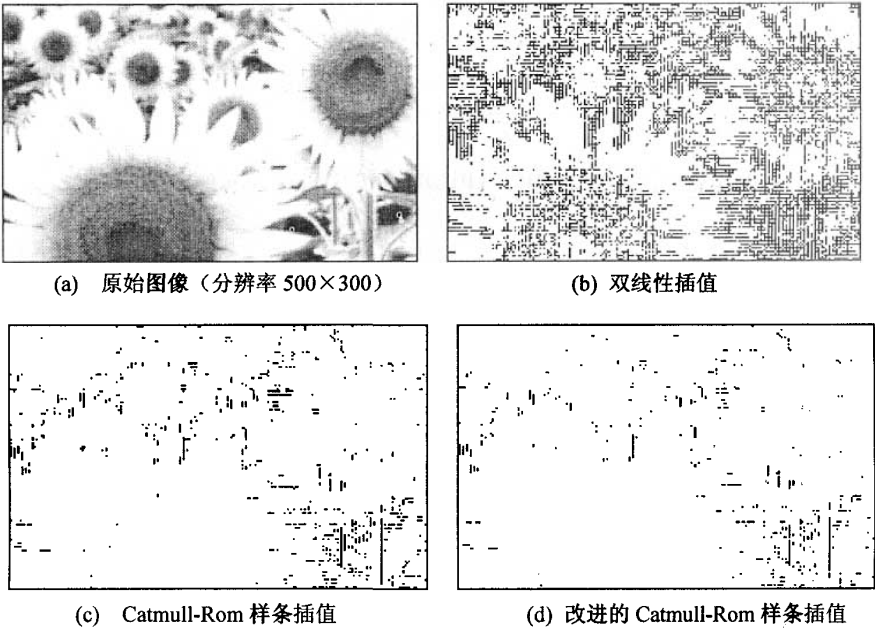


图 2 不同插值方法的误差图像

为了比较各种插值方法的处理速度,将一幅图像放大为 500×300 的尺寸,并对图像采样过程中的插值时间进行了测试,结果列于表 1。其中,双线性插值的计算时间最少,约为 Catmull-Rom 样条的 24%。B 样条插值的计算时间最多,约为 Catmull-Rom 样条的 3 倍。改进的 Catmull-Rom 样条的插计算时间仅比 Catmull-Rom 样条增加 12%;具有较高的插值效率。

表 1 几种典型的插值方法在图像采样耗时间上的比较

插值方法	双线性	Catmull-Rom 样条	改进的 Catmull-Rom 样条	3 次 B 样条
插值时间(ms)	25.7	106.3	118.9	313.7

4 结束语

文中在 Catmull-Rom 样条函数的基础上,通过重新定义节点导数计算方式,构造了一种改进的 Catmull-Rom 样条函数用于图像的缩放处理。实验结果表明这种改进的 Catmull-Rom 样条在没有明显降低插值效率的前提下有效降低了插值误差,有效提高了输



(e) 模板去噪结果

图3 用各种方法进行实验的结果

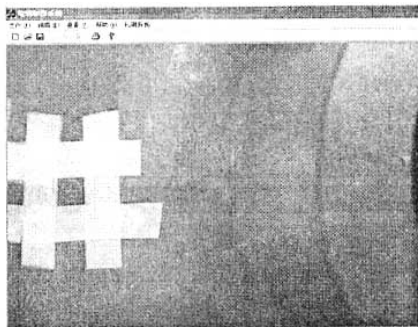


图4 现场图

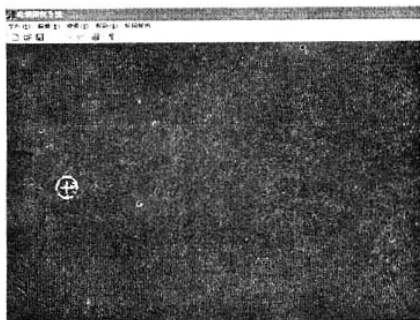


图5 检测结果

录;反之,轮毂顺利通过生产线。图4,图5分别为现场图与检测结果。

#### 4 结束语

本系统完成了从图像采集到图像处理、特征提取,直至输出报警的功能,不仅在实验中取得了良好的效果,也在现场的测试中很好地完成了各项功能,满足了在线检测的精度和速度方面的要求,系统具有一定的推广价值。

#### 参考文献:

- [1] 吴并臻,王俊然,铃木昭.接触电位差法固定探头式金属表面探伤装置[J].北京科技大学学报,1998,20(2):164-168.
- [2] 周 军,李新昊.荧光磁粉自动无损检测系统[J].工矿自动化,2005(1):15-16.
- [3] 周 军,彭培欣.自动磁粉探伤系统中的图像技术[J].仪器仪表学报,2003(8):461-462.
- [4] 刘 磊,刘秀兰,俞 序.全自动荧光磁粉检测系统研究[J].机械工程与自动化,2004(6):12-14.
- [5] Wilson S S. Theory of Matrix Morphology[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1992,14(6):636-652.
- [6] Gonzalez R C, Woods R E, Eddins S L. Digital Image Processing Using MATLAB[M]. [s. l.]: Prentice Hall, 2004: 337-345.
- [7] Shih F Y, Mitchell O R. Industrial Parts Recognition and Inspection by Image Morphology[C]//IEEE International Conference. [s. l.]: [s. n.], 1988: 1764-1766.
- [8] 胡广书. 数字信号处理——理论、算法与实现[M]. 第2版. 北京:清华大学出版社,2003:150-155.
- [9] Sonka M, Hlavac V, Boyle R. Image Processing, Analysis, and Machine Vision[M]. Second Edition. United States of America: Thomson Learning and PT Press, 2003: 128-130.

(上接第213页)

出图像质量。该算法适用于对图像缩放的质量与处理速度都要求较高的应用场合。

#### 参考文献:

- [1] 冈萨雷斯,伍 兹. 数字图像处理[M]. 北京:电子工业出版社, 2003:50-51.
- [2] 杨朝霞,逯 峰,关履泰. 用B样条的尺度关系来实现图像任意精度的放大缩小[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001,13(9):824-827.
- [3] Lehmann T M, Gonner C, Spitzer K. Addendum: B-spline interpolation in medical image processing[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2001, 20(7):660-665.
- [4] DeRose T D, Barsky B A. Geometric continuity, shape parameters, and geometric constructions for Catmull-Rom splines[J]. ACM Transactions on Graphics, 1988, 7(1):1-41.
- [5] Singh G, Sharma A C. Geometrically Continuous Curve and Surface Generation Using Catmull-Rom Splines[C]// IEEE Region 10 International Conference on EC3 - Energy, Computer, Communication and Control Systems. New Delhi, India: bezit TU/e Publication, 1991:28-32.
- [6] Dodgson N A. Quadratic interpolation for image resampling[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(9): 1322-1326.