基于混合遗传算法求解非线性方程组

田巧玉,古钟璧,周新志
(四川大学 电子信息学院,四川 成都 610064)

摘 要:将非线性方程组的求解问题转化为函数优化问题,且综合考虑了拟牛顿法和遗传算法各自的优点,提出了一种用于求解非线性方程组的混合遗传算法。该混合算法充分发挥了拟牛顿法的局部搜索、收敛速度快和遗传算法的群体搜索、全局收敛的优点。为了证明该混合遗传算法的有效性,选择了几个典型的非线性方程组,从实验计算结果、收敛可靠性指标对比不同算法进行分析。数值模拟实验表明,该混合遗传算法具有很高的精确性和收敛性,是求解非线性方程组的一种有效算法。

关键词:非线性方程组;函数优化;拟牛顿法;混合遗传算法
中图分类号:TP18 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2007)03-0010-03

Solving Systems of Nonlinear Equations with Hybrid Genetic Algorithm

TIAN Qiao-yu, GU Zhong-bi, ZHOU Xin-zhi
(Department of Electronics and Information, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: The problems on solving nonlinear equations is transformed into that of function optimization. A hybrid genetic algorithm (HGA) was put forward, which combined the advantages of quasi-Newton method and genetic algorithm (GA). The HGA sufficiently exerted the advantages of quasi-Newton method such as local search, high convergence rate and GA such as group search, global convergence. For sake of proving the reliability of the HGA, the results of experiments computation and the convergence reliability of different algorithms were compared by testing several classical equations of nonlinear equations. Numerical simulation experiments show that HGA has high precision and convergence characteristics, and is a reliable approach in solving systems of nonlinear equations.

Key words: systems of nonlinear equations; function optimization; quasi-Newton method; HGA

0 引 言

在理论研究和应用实践中,几乎绝大多数的问题都最终转化成方程或方程组。在非线性问题中尤以非线性方程和非线性方程组的求解最为重要。文中针对非线性方程组进行分析。解决此类问题的方法有经典算法以及近年来流行的遗传算法,经典算法无论从算法的选择还是算法本身的构造都与所要解决的问题的特性有很大关系。牛顿法及其改进形式是目前应用最广泛的非线性方程组求解的方法,该类算法具有较快、与迭代初值有关的局部收敛性,但是此类算法的收敛性在很大程度上依赖于初始点的选择,而选择一个好的初始点往往又是非常困难;且由于收敛的局部性,对于一些高非线性方程,传统数值解法容易导致求解失败,有效性较低。遗传算法是模拟生物进化中"物竞天择、适者生存"原则的计算智能方法[1]。它具有全局搜索、高度适应性、较强鲁棒性以及隐含并行性的优点,但由于遗传算法收敛相对较慢,编码长度对精度影响大等因素,对非线性方程组求解,与传统数值方法相比并不具有优势[2]。对此,尝试从优化和迭代相结合的角度来求解非线性方程组,从遗传算法和经典算法(拟牛顿法)各自的特点出发,设计了一种用于求解高非线性方程组的高效可靠的混合遗传算法。

1 问题描述

设一个实函数非线性方程组由 n 个方程组成,涉及 m 个变量 $X=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_j,\cdots,x_m)$,且有解:

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m)=A_1\\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m)=A_2\\ \cdots\cdots\\ \varphi_i(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m)=A_i\\ \cdots\cdots\\ \varphi_n(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m)=A_n\end{cases}\quad X\in\Phi \qquad (1)$$

收稿日期:2006-05-29
作者简介:田巧玉(1979-),女,四川眉山人,硕士研究生,研究方向为模式识别与智能系统、动态配水;古钟璧,教授,研究方向为复杂系统建模及人工智能;周新志,副教授,博士,研究方向为分布式测控系统体系及策略。

其中,$\varphi_i()$ 可为任意形式的函数表达式(分段函数除外),$\Phi = \{X \mid x_j \in (a_j, b_j)\}$。求方程组(1)等价于求解下面一个极值问题:求一个 X,使式(1)取值最小。当其最小值为 0 时,所对应的 X 为方程组的解。即:

$$\begin{cases} \text{find}: X = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m) \\ \text{s.t.}: \min\varphi(X) = \min\limits_{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi_i(X) - A_i)^2} \end{cases} \tag{2}$$

2 混合遗传算法

文中在实现遗传算法与拟牛顿法相结合的思路是:在应用遗传算法进行优化设计的基础上,采用拟牛顿法进行二次优化,将获得的结果作为最优的设计结果,即:首先运行遗传算法,找到最优点附近的一个点,将它作为拟牛顿法的初始点,以找到目标函数的最小值。

2.1 拟牛顿法

牛顿法及其改进形式是目前应用最为广泛的非线性方程组求解方法,但由于牛顿法需要每步计算函数的导数,若导函数不能直接表示出来,则很难求解。为了减少因计算导数而带来的大量计算量,用牛顿法的改进形式拟牛顿法来代替。拟牛顿法的核心思想是通过用导函数的近似矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 来代替牛顿迭代法中的导函数计算。其迭代格式为:

$$x^{k+1} = x^k - \boldsymbol{A}_k^{-1} F(x^k), \text{其中 } \boldsymbol{A}_k = \frac{\mathrm{d}f(x^k)}{\mathrm{d}x}。$$

2.2 遗传算法原理及设计

遗传算法是一种借鉴生物界自然选择和自然遗传机制的随机搜索算法。遗传操作是一种群体操作,以群体中的所有个体为对象。它包括 3 个主要操作算子:选择(selection)、交叉(crossover)和变异(mutation),它们构成了所谓的遗传操作(genetic operation),使得遗传算法具有了其他传统方法所没有的特性[2]。

2.2.1 适应度设计

成功运用遗传算法求解方程组的首要问题就是如何设计适应度函数。对式(1)采用形如 $\varphi_i(X)/A_i = 1$ 的归一化处理(若 $A_i = 0$ 则不需作处理),因此,适应度函数可以设计成:

$$\text{fitness}(X) = -\min_{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(X)/A_i - 1)^2} \tag{3}$$

适应度值越大,解的近似程度越好。

2.2.2 遗传操作设计

(1) 选择算子。

采用锦标赛选择法(tournament selection)。锦标赛选择的参数为竞赛规模(Tour),其取值范围为[2, Nind]。为了防止采用此方法出现早熟现象,可以采用适应度函数尺度变换的方法来解决。文中采用的是顶级尺度变换(Top Scaling)。此变换的参数为“Quantity(数量)”。

(2) 交叉算子。

交叉算子采用启发式(Heuristic)交叉。可以使用参数“Ratio”指定子辈离较好适应度的父辈有多远。如父辈是 parent1 和 parent2,而 parent1 有较好的适应度,则启发式交叉生成的子辈如下[3]:

child = parent2 + Ratio * (parent1 − parent2)

(3) 变异算子。

文中采用 Gaussian 变异算子,此变异算子在进行变异操作时,将一正态分布、具有均值的随机数加入到父向量的每一项,替换原有基因值。该 Gaussian 变异算子由两个参数“Scale”和“Shrink”决定[3]。

运算终止规则:对于非线性方程组的求解,迭代终止条件有两个:一个是进化到指定的最大代数;另外一个是适应度限,即当前代的最佳适应度值小于或等于规定的值时就停止。文中选择了适应度限 $\leqslant \varepsilon_0$,其中 $\varepsilon_0 = 10^{-6}$。

2.3 算法描述

Begin

确定设计变量的上、下限,随机产生初始父代群体,并对群体中每一个个体进行编码,设定算法基本参数。

While

评价种群:计算各个个体的适应度;

选择种群中两个个体以交叉概率 P_c 进行启发式交叉运算,将父代和子代都加入到子代群体;

对群体中每个个体以变异概率 P_m 进行高斯变异运算,将父代和子代都加入到子代群体;

依据顶级尺度变换的锦标赛选择算子,选择新的群体;

Until 满足适应度限

以以上结果作为经典算法的初始点,进行二次优化,找到全局最小值点;

End

3 数值计算和分析

3.1 数值计算

为考察文中提出的混合遗传算法的性能,选取了几例具有代表性的非线性方程组进行数值分析。

问题 1[4]:

$$\begin{cases} x_1^{x_2} + x_2^{x_1} - 5x_1x_2x_3 = 85 \\ x_1^3 - x_2^{x_3} - x_3^{x_2} = 60 \\ x_1^{x_3} + x_3^{x_1} - x_2 = 2 \end{cases}$$

$D_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid 3 \leqslant x_1 \leqslant 5, 2 \leqslant x_2 \leqslant 4, 0.5 \leqslant x_3 \leqslant 2\}$

问题 2[5]：

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 6x_3x_4 = 5 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_3 - 10x_4 = 0 \\ 2.5x_1 + 2^{x_2} - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1x_2 + x_3 + x_4 + 0.5 = 0 \end{cases}$$

$D_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid -10 \leqslant x_i \leqslant 10, i = 1,2,3,4\}$

问题 3[6]：

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{x_2^2x_4x_6}{4} + 0.75 = 0 \\ x_2 + 0.405e^{1+x_1x_2} = 1.405 \\ x_3 - \dfrac{x_4x_6}{2} + 1.5 = 0 \\ x_4 - 0.605e^{1-x_3^2} = 0.395 \\ x_5 - \dfrac{x_2x_6}{2} + 1.5 = 0 \\ x_6 - x_1x_5 = 0 \end{cases}$$

3.2 结果分析

在进行算法测试时，问题 3 的变量区间取为[−3, 3]。混合遗传算法采用实数编码，以上三个问题中，群体规模 population－size 均为 80，进化总代数取为 170，取 Tour 为 4，Quantity 为 0.4，Gaussian 变异算子中 Scale 取 0.9，Shrink 取 1.0；Heuristic 交叉算子的 Ratio 取 1.2。选择了遗传算法、拟牛顿法、拟牛顿混合遗传算法对每个问题随机进行了 100 次实验。表 1 给出了三种不同算法在求解此三个问题的最优解；表 2 给出了三种不同算法在求解以上三个问题 100 次随机实验中的成功概率（笔者认为 $\varepsilon = \max|\varphi_i(x)| < 10^{-6}$ 算法求解成功）。

表 1　实验计算结果

问题	精确解	GA	拟牛顿法	HGA
1	$x_1 = 4.00000$	$x_1 = 3.97284$	$x_1 = 3.98312$	$x_1 = 4.00000$
	$x_2 = 3.00000$	$x_2 = 1.96452$	$x_2 = 2.35036$	$x_2 = 3.00000$
	$x_3 = 1.00000$	$x_3 = -0.82080$	$x_3 = 0.85712$	$x_3 = 0.99999$
2	$x_1 = 1.00000$	$x_1 = 1.09124$	$x_1 = 1.03142$	$x_1 = 1.00000$
	$x_2 = 0.00000$	$x_2 = 0.11947$	$x_2 = 0.09741$	$x_2 = 0.00000$
	$x_3 = -1.00000$	$x_3 = -0.76034$	$x_3 = -1.03145$	$x_3 = -1.00000$
	$x_4 = 0.50000$	$x_4 = 0.45141$	$x_4 = 0.45276$	$x_4 = 0.50000$
3	$x_1 = -1.00000$	$x_1 = -0.80242$	$x_1 = -0.85834$	$x_1 = -1.00000$
	$x_2 = 0.00000$	$x_2 = 0.53951$	$x_2 = 0.64539$	$x_2 = 1.00000$
	$x_3 = -1.00000$	$x_3 = -0.72059$	$x_3 = -0.96306$	$x_3 = -1.00000$
	$x_4 = 1.00000$	$x_4 = 1.39901$	$x_4 = 0.91675$	$x_4 = 1.00000$
	$x_5 = -1.00000$	$x_5 = -1.26475$	$x_5 = -1.09958$	$x_5 = -1.00001$
	$x_6 = 1.00000$	$x_6 = 1.03442$	$x_6 = 1.12333$	$x_6 = 1.00000$

表 2　收敛可靠性对比　（%）

问题	GA	拟牛顿法	HGA
1	17	27	100
2	32	45	100
3	0	29	100

分析：

（1）遗传算法在一般的非线性方程组中可以获得近似解，但是精度很难满足，在高非线性方程组中，既难满足精度又难得到近似解；对于拟牛顿法，选择初始点是一个非常棘手的问题，只要初始点选得不合适，就会导致求解失败。笔者尝试过：如果随机选择初始点，十有八九得不出近似解。因此单独的拟牛顿法和遗传算法在求解类似这种高精度非线性方程组的问题中，均没有优势。

（2）混合遗传算法对三个问题求解不仅得到了近似解，而且可靠性均达到了 100%，明显高于单独的拟牛顿法和遗传算法，这说明了在遗传算法中引入经典算法可以提高遗传算法的效率，为解决此类问题提供了一个好方法。

4 结　论

针对传统非线性方程组求解算法的初始点敏感问题，综合考虑了遗传算法和经典算法的优缺点，设计了一种混合遗传算法来求解非线性方程组。该混合遗传算法融入了优化和迭代两种求解机制，能充分发挥遗传算法的全局收敛性和群体搜索能力以及经典算法（拟牛顿法）的强局部收敛和精度高的优点，得到令人满意的结果。以上的数值模拟已表明，混合遗传算法具有很高的精确性和收敛性，可以用于求解实际非线性方程组问题。

参考文献：

[1] 赵明旺.基于牛顿法和遗传算法求解非线性方程组的混合计算智能方法[J].小型微型计算机系统，1997，18(11)：13－18.

[2] 周　明，孙树冻.遗传算法原理及应用[M].北京：国防工业出版社，1999.

[3] 雷英杰，张善文，李续武，等.MATLAB 遗传算法工具箱及应用[M].西安：西安电子科技大学出版社，2005.

[4] 曾　毅.浮点遗传算法在非线性方程组求解中的应用[J].华东交通大学学报，2005，22(1)：152－155.

[5] 胡小兵，吴树范，江　驹.一种基于遗传算法的求解代数方程组数值的新方法[J].控制理论与应用，2002，19(4)：567－570.

[6] 罗亚中，袁端才，唐国全.求解非线性方程组的混合遗传算法[J].计算力学学报，2005，22(1)：109－114.