

## 基于拉格朗日松弛法的时延约束组播路由算法

马建平, 孙 强

(华东师范大学 计算机科学与技术系, 上海 200062)

**摘 要:**通过对时延约束组播路由网络模型的分析,提出了一种基于拉格朗日松弛法的时延约束的低代价组播路由算法(LR-DLMR)。由于封闭图对原网络的多播不可达问题,该算法并没有构建原网络的封闭图,从而有效利用了链路中间节点信息。仿真实验结果表明本算法具有良好的稳定性,有较低的代价和时延。

**关键词:**组播路由;时延约束;Steiner树;拉格朗日松弛

**中图分类号:**TP393

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2006)11-0128-03

## Lagrange Relaxation - Based Method for Delay - Constrained Multicast Routing

MA Jian-ping, SUN Qiang

(Department of Computer Science &amp; Technology, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

**Abstract:** By analyzing network model of delay - constrained multicast routing, Lagrange relaxation - based method for delay - constrained least - cost multicast routing (LR - DLMR) is presented. Because closure - graph has a problem for the original graph, the multicast tree is produced by LR - DLMR without constructing closure - graph. Simulations demonstrate that performance of the algorithm is steady, cost and delay of multicast tree are both lower.

**Key words:** multicast routing; delay - constrained; Steiner tree; Lagrange relaxation

## 0 引言

组播(multicast)是一种可由源节点同时向多个目的节点发送信息的通信方式,而组播路由的目标是寻找从源节点到所有目的节点的路径。随着计算机网络技术的发展,大量新兴多媒体应用,如电视电话会议、远程教学等涉及多个用户参与,不仅需要消耗大量的网络资源,而且视频、音频等多媒体业务对网络服务质量,尤其是端到端的时延有严格的要求。因此,需要限制组播时延且降低组播代价来支持这些新兴通信业务。

组播路由通常采用树型结构,因此一方面要保证信息到不同信宿的并行传输,另一方面保证数据复制最少,从而减少冗余信息的传递并降低网络资源的消耗。寻找满足时延限制的最小代价组播路由问题可以形式化为受限的Steiner树问题,而它作为一个NP完全问题,一直是路由问题中的研究难点。KPP<sup>[1]</sup>算法扩展了用于求解不受限的Steiner树问题的KMB<sup>[2]</sup>算法,首先求任意两点间满足时延约束的最小代价路径,并以此构建封闭图,最后基于最小生成树的启发式算法产生路由树,其算法复杂度为 $O(mn^3)$ ,其中 $m$ 为组播目的节点数, $n$ 为网络节点数。但

给原网络构建封闭图方法有先天的不足,即全连通封闭图的“多播可达”不等同于原网络的“多播可达”<sup>[3]</sup>,文中针对这个问题利用拉格朗日松弛算法解决NP问题的良好性能,提出了一种不用构建封闭图的基于拉格朗日松弛法的时延约束最小代价组播路由算法(LR-DLMR),其复杂度仅为 $O(p(m+3/2)n^2 - pm^2n)$ ,其中 $m$ 为组播目的节点数, $n$ 为网络节点数, $p$ 为松弛次数。

## 1 时延约束组播的网络模型

将计算机网络表示为带权简单无向图 $G=(V,E)$ ,其中 $V$ 为图 $G$ 中节点集合,表示网络中的主机或路由器; $E$ 为图 $G$ 中的边集合,表示连接网络节点的通信链路。对于每条链路 $(u,v) \in E$ ,定义两个正实函数: $c(u,v)$ 和 $d(u,v)$ ,分别表示链路代价和链路时延。给定组播通信的源节点 $s \in V$ ,一组目的节点 $M \subseteq V - \{s\}$ 。组播数据流由源节点经过组播树 $T=(V_T, E_T)$ 传往所有目的节点,其中 $V_T \subseteq V, E_T \subseteq E, M \subseteq V_T$ 。设 $p(u,v)$ 表示节点 $u$ 到节点 $v$ 的一条路径, $e \in E$ ,组播树 $T$ 有如下关系成立:

$$\text{组播树 } T \text{ 的代价: } \text{cost}(T) = \sum_{e \in T} c(e) \quad (1)$$

路径 $p(s,m)$ 时延:

$$\text{delay}(p(s,m)) = \sum_{e \in p(s,m)} d(e), m \in M \quad (2)$$

组播树 $T$ 的时延:

收稿日期:2006-02-28

作者简介:马建平(1981-),男,甘肃平凉人,硕士研究生,研究方向为网络路由算法;孙 强,副教授,研究方向为软件与算法。

$$\text{delay}(T) = \max_{m \in M} (\text{delay}(p(s, m))) \quad (3)$$

给定的端到端时延上限  $\Delta$  表示从源节点到任意目的节点路径必须满足端到端的时延限制,时延约束的代价最小组播树  $T_{DM}$  定义如下:

$$\begin{cases} \text{cost}(T_{DM}) = \min(\text{cost}(T)) \\ \text{delay}(T) \leq \Delta \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{delay}(T) \leq \Delta \quad (5)$$

即  $T_{DM}$  是所有满足时延限制条件(5)的组播树  $T$  中代价最小的。

## 2 基于拉格朗日松弛法的时延约束低代价组播路由算法(LR-DLMR)

文中算法以源节点  $s$  为起始树  $T$ ,假定源节点存储了整个网络拓扑信息。为了保证求得的组播树满足时延限制,算法首先用 Dijkstra 最短路径算法求得以源节点  $s$  为根的最小时延树  $T_{\text{delay}}$ ,如果  $T_{\text{delay}}$  不能满足时延限制,则任何其它的路由树不可能满足时延限制,无解,算法退出;否则,算法利用 MCTH<sup>[4]</sup> 算法,进行拉格朗日松弛,根据拉格朗日对偶规划松弛方法,最终求得满足时延限制的下限条件的最大值。

### 2.1 MCTH 算法

MCTH 算法是构建无时延限制的最小代价组播树启发式算法。它以源节点为起始树,每次选择和当前组播树有最小代价的节点,如果选择的节点为目的节点,将位于这条最小代价路径上节点的代价值均重置为零并加入到组播树中。重复上述操作直到组播树包括所有目的节点。

#### 算法 1 MCTH

- ① 设置  $T \leftarrow \{s\}$ ,  $Q \leftarrow V - \{s\}$ ,  $W \leftarrow C_k, i, i \in Q$ ;
- ② 若  $Q = \emptyset$ , 算法停止。否则选择满足条件  $|W_j| = \min\{W_k\}, k \in Q$  的节点  $j$ ,  $Q \leftarrow Q - \{j\}$ ;
- ③ 若  $j \in M$ ,  $T \leftarrow T \cup \text{Path}(s, j)$ , 对任意  $i \in \text{Path}(s, j)$ ,  $W_i \leftarrow 0$ ;
- ④ 对任意  $i \in V - T$ , 根据  $W_i = \min(W_i, W_k + C_{k,i}), k \in T$  调整最小代价路径  $\text{Path}(s, i)$ ;
- ⑤ 转向 ②;

MCTH 算法选择节点的尺度始终是距离当前组播树的最小代价,所以其求出的组播树必是整体代价最优的,它有良好的平均性能,算法复杂度为  $O((m + 3/2)n^2 - m^2n)$ ,其中  $n$  为网络节点数,  $m$  为目的节点数<sup>[4]</sup>。

### 2.2 拉格朗日松弛算法(Lagrange relaxation)

拉格朗日松弛算法是组合优化中用来解决 NP 问题,求解下界的一种方法,由于该算法的实现比较简单,具有比较好的性质,可以用在其他算法中以提高算法的效率。拉格朗日松弛算法的基本原理是:将造成问题难的约束吸收到目标函数中,并使得目标函数仍保持线性,由此使得问题容易求解<sup>[5]</sup>。

本算法将时延约束条件式(4)吸收到目标代价函数式(5)中后,目标函数仍然保持线性,而此时的时延约束

的最小代价组播路由问题变为对聚合函数  $c_\lambda = c + \lambda d$  用 MCTH 求解最小代价组播树的问题。吸收时延约束条件到目标代价函数后,式(4) - (5)变为:

$$\text{LR}(\lambda) = \min(\text{cost}(T)) + \lambda(\text{delay}(T) - \Delta), \lambda \text{ 为松弛参数} \quad (6)$$

● 定理 1 对于任意的  $\lambda \geq 0$ ,  $\text{LR}(\lambda)$  是问题(4) - (5)的下界。

证明:假定  $T^*$  是问题(4) - (5)的最优解,则有如下关系成立,

$$\begin{aligned} \text{LR}(\lambda) &= \min(\text{cost}(T)) + \lambda(\text{delay}(T) - \Delta) = \\ &= \min(\text{cost}(T) + \lambda \text{delay}(T)) - \lambda \Delta \leq c_\lambda(T^*) - \lambda \Delta = \\ &= c(T^*) + \lambda(d(T^*) - \Delta) \leq c(T^*) \end{aligned}$$

所以定理 1 得证,成立。

由定理 1 及其证明过程可知,我们所要求的就是原问题下界的最佳值,即与最优解最接近的那个下界值,用求拉格朗日对偶(LD)问题的解表示为:

$$\text{LR}^* = \max(\text{LR}(\lambda)), \lambda \geq 0 \quad (7)$$

其中,  $\text{LR}^*$  就是与最优值最为接近的下界值。

● 定理 2 对于任意两个松弛参数  $\lambda_1, \lambda_2$ , 且  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ , 若  $T_1 = \text{MCTH}(c + \lambda_1 d)$ ,  $T_2 = \text{MCTH}(c + \lambda_2 d)$ , 则  $\text{cost}(T_1) \leq \text{cost}(T_2)$ ,  $\text{delay}(T_1) \geq \text{delay}(T_2)$ 。

证明:因为在聚合函数  $c_\lambda = c + \lambda d$  中,显然随着  $\lambda$  的增大,  $\text{delay}$  在  $c_\lambda$  (新的边权) 中的权重也随之增大,而  $\text{cost}$  的权重则相对减少。根据 MCTH 算法定义,可得定理 2 成立。

求拉格朗日对偶(LD)问题希望下界  $\text{LR}^*$  尽可能大,于是按  $\text{LR}(\lambda)$  的上升方向逐渐逼近下界最优值。由定理 2 可知,随着  $\lambda$  的增大,最终由  $\text{MCTH}(c + \lambda d)$  生成的  $T$  是最接近最优受限代价最小组播树的。但在实际计算中,不可能无穷迭代,为了达到最优值,采用目标值上下界相等的停止原则<sup>[5]</sup>,设  $T_{\text{UP}}$  和  $T_{\text{LB}}$  分别为最优值的上界(不可行解)和下界(可行解),当  $c_\lambda(T_{\text{UP}}) = c_\lambda(T_{\text{LB}})$  时,停止迭代。由聚合函数  $c_\lambda = c + \lambda d$  可得:

$$\begin{aligned} \text{cost}(T_{\text{UP}}) + \lambda \text{delay}(T_{\text{UP}}) &= \text{cost}(T_{\text{LB}}) + \lambda \text{delay}(T_{\text{LB}}), \text{得} \\ \lambda &= \frac{\text{cost}(T_{\text{LB}}) - \text{cost}(T_{\text{UP}})}{\text{delay}(T_{\text{UP}}) - \text{delay}(T_{\text{LB}})} \end{aligned} \quad (8)$$

基于上述分析,可得 LR-DLMR 描述如下:

#### 算法 2 LR-DLMR

- ① 用 Dijkstra( $d$ ) 最短路径算法求得最小时延树  $T_{\text{delay}}$ ;
- ② if ( $\text{delay}(T_{\text{delay}}) > \Delta$ ) then 退出, 无解;
- ③ else 用 MCTH( $c$ ) 算法求得无时延限制的最小代价树  $T_{\text{cost}}$ ;
- ④ if ( $\text{delay}(T_{\text{cost}}) \leq \Delta$ ) then return  $T_{\text{cost}}$ ;
- ⑤ else  $\lambda = \frac{\text{cost}(T_{\text{delay}}) - \text{cost}(T_{\text{cost}})}{\text{delay}(T_{\text{cost}}) - \text{delay}(T_{\text{delay}})}$ , 更新松弛参数  $\lambda$ ;
- ⑥  $T = \text{MCTH}(c + \lambda d)$ ;

⑦if(( $c_\lambda(T) = c_\lambda(T_{\text{delay}})$ ) or ( $c_\lambda(T) = c_\lambda(T_{\text{ext}})$ )) then return  $T_{\text{delay}}$ ;  
 ⑧else if( $\text{delay}(T) \leq \Delta$ ) then  $T_{\text{delay}} = T$ ;  
 ⑨else  $T_{\text{ext}} = T$ ;  
 ⑩转向 ⑤。

●定理3 算法 LR-DLMR 在最坏情况下的复杂度为  $O(\rho(m+3/2)n^2 - \rho m^2 n)$ ,  $n$  为网络中的节点数,  $m$  为目的节点数,  $\rho$  为 MCTH 算法的执行次数(松弛次数)。

证明:由于求得最小时延树算法的复杂度为  $O(n^2)$ , MCTH 算法的复杂度为  $O((m+3/2)n^2 - m^2 n)$ , 所以 LR 的复杂度为  $O(\rho(m+3/2)n^2 - \rho m^2 n)$ 。因此, 算法 LR-DLMR 在最坏条件下的复杂度为  $O(\rho(m+3/2)n^2 - \rho m^2 n)$ 。

### 3 实验仿真与分析

网络模型采用 Waxman<sup>[6]</sup> 提出的随机图模型, 该模型产生的随机图与真实网络比较接近。随机图的节点随机分布在矩形区域内, 随机图中边存在的概率为  $P_e(u, v) = \beta \exp[-\frac{d(u, v)}{\alpha L}]$ , 其中  $d(u, v)$  为节点  $u$  到节点  $v$  的欧氏距离,  $L$  为节点间的最大欧氏距离值, 较小的  $\alpha$  值将增大短链路的密度, 较大的  $\beta$  值将导致较高的链路密度。 $\alpha$ ,  $\beta$  为区间  $(0, 1]$  的实数, 在实验中  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ , 源节点和目的节点在图中的节点集中随机选择。链路代价值正比于链路距离, 链路时延值取  $(0, 1)$  内的随机数的 10 倍。仿真情况定为时延限制为 300, 组播节点数为 20。由于 KMB 算法生成组播树时只考虑到代价, LD 算法只考虑到时延, 分别以这两种算法作为参照系的超出的代价百分比和时延百分比, 得到结果如图 1、图 2 所示。

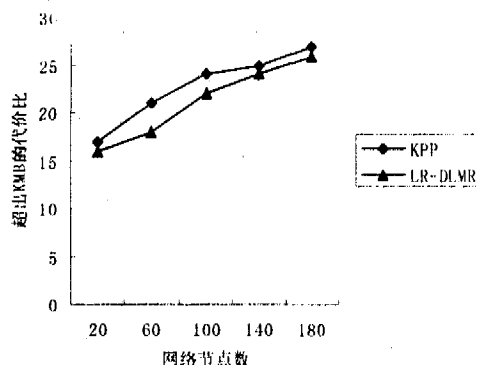


图 1 网络节点数和超出 KMB 代价比关系

由图 1、图 2 可以看出, 文中算法在代价和时延性能方面都优于 KPP 算法, 而且性能比较稳定, 主要在于该算法并没有像 KPP 算法那样构建原网络的封闭图, 从而有效地利用了链路中间节点的网络信息, 以及拉格朗日松弛算法解决 NP 问题的良好性能。

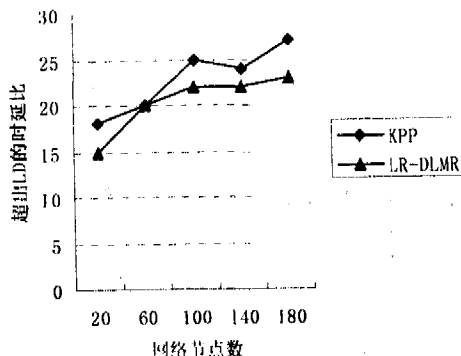


图 2 网络节点数和超出 LD 时延比关系

### 4 结论

文中针对受限组播路由问题, 给出了时延受限的组播路由模型, 在利用拉格朗日松弛法的基础上, 对其进行松弛, 提出了一种基于拉格朗日松弛法的时延受限的低代价组播路由算法 LR-DLMR。该算法很好地利用了链路中间节点的网络信息, 且其复杂度仅为  $O(\rho(m+3/2)n^2 - \rho m^2 n)$ , 通过实验仿真得出, 该算法代价性能良好、稳定, 算法时延低、速度快。

### 参考文献:

- [1] Kompella V P, Pasquale J C, Polyzos G C. Multicasting routing for multimedia communication[J]. IEEE/ACM Trans on Networking, 1993, 1(3): 286-292.
- [2] Kou L, Markowsky G, Berman L. A fast algorithm for Steiner trees in graphs[J]. Acta Informatica, 1981, 15(2): 141-145.
- [3] 王明中, 谢剑英. 时延抖动限制的最小代价多播路由策略[J]. 计算机学报, 2002, 25(5): 534-541.
- [4] 杨明, 谢希仁. 一种快速的近似最小代价多播路由算法 MCTH[J]. 东南大学学报, 1999, 29(3): 95-99.
- [5] 邢文训, 谢金星. 现代最优化计算方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999: 247-290.
- [6] Waxman B M. Routing of multipoint connections[J]. IEEE J on Selected Areas in Communications, 1988, 6(9): 1617-1622.

(上接第 127 页)

- [2] Bray T, Paoli J, Sperberg-McQueen C M. Extensible Markup Language (XML) 1.0. W3C Recommendation [EB/OL]. 1998-02-10. <http://www.w3.org/TR/1998/REC-xml-19980210.html>.
- [3] Box D, Skonnard A, Lam J. Essential XML[M]. 卓栋涛, 译. 北京: 中国电力出版社, 2000.

- [4] 瞿裕忠, 张剑峰, 陈峥, 等. XML 语言及相关技术综述[J]. 计算机工程, 2000, 26(12): 4-6.
- [5] van der Aalst W, van Hee K. Workflow Management. Models, Methods and Systems[M]. Cambridge: The MIT Press, 2002.