

# 一种基于面积比不变性约束的曲面纹理算法

刘晓梅, 秦文虎, 赵正旭  
(东南大学, 江苏南京 210096)

**摘要:**文中运用两步映射原理解决了曲面的参数化问题,改进了一种采用面积比不变性约束的球冠映射算法,消除了采用传统的整球面和半球面参数化方法向中间曲面作映射所带来的纹理变形问题,进而较好地实现了由非参数化面片拼接成的曲面表面的纹理映射。

**关键词:**纹理映射;中介曲面;球面纹理;面积比不变性

**中图分类号:** TP301.6

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2006)09-0001-03

## An Algorithm of Surface Texture Mapping Based on Invariability of Ratio of Areas

LIU Xiao-mei, QIN Wen-hu, ZHAO Zheng-xu  
(Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** An algorithm based on the invariability of ratio of areas is improved on the parametrization of the surface, which uses the two-part texture mapping. This method eliminates the distortion in the process of the mapping on the intermediate surface by the traditional sphere and hemisphere parametrization. As a result, this method realized the surface's texture mapping, which is constructed by the non-parametric patches.

**Key words:** texture mapping; intermediate surface; sphere texture; invariability of ratio of areas

### 0 引言

为了模拟物体表面精致的、不规则的颜色纹理,在虚拟现实技术中引入了纹理映射技术。纹理映射是真实感图形绘制的一种重要技术,用于快速生成物体表面纹理细节,可显著增强真实感。如今,该技术已得到了广泛的应用。其中两步纹理映射是 Bier 和 Sloan 于 1986 年提出的一种用于三维曲面纹理映射的方法<sup>[1]</sup>。它首先定义 2D 纹理图案所在的纹理坐标系、中间面所在的 3D 参数坐标系、实体-曲面所在的世界坐标系;其次建立二维纹理空间和三维中间面空间的映射关系;最后将三维曲面嵌入三维中间面空间,对曲面表面各个顶点进行参数化。作为中介空间的中介面可以是平面也可以是曲面。当被映射的物体是旋转体时,应选用柱面为中介面;其他情况下,一般采用球面为中介面<sup>[2]</sup>。

在以球面为中介面的两步纹理映射中,球面纹理映射方法一直是图形学研究的重点。文中在分析几种常用球面映射算法原理的基础上,通过改进算法,找出了一种映射效果比较理想的算法。

### 1 球面纹理映射算法

#### 1.1 整球面的纹理映射算法

传统的整球面纹理映射方法就是将一个矩形的纹理图案映射到整个球面上。

如图 1 所示,对整个球面进行划分,将球面上的任意一条经线  $\theta$  映射为纹理坐标中以  $u$  为常数的水平线,将任一纬线  $\phi$  映射为纹理坐标中以  $v$  为常数的垂直线,建立球面上任意一点的经纬坐标  $(\theta, \phi)$  和纹理平面坐标  $(u, v)$  之间的映射关系。为了便于分析,取球面半径为 1,球心为原点  $O$ ,纹理平面为单位正方形,设  $P(\theta, \phi)$  为球面上任意一点, $P$  映射后的点为  $Q(u, v)$ ,其中  $\theta$  为  $OP$  映射到  $XOY$  平面后与  $X$  轴的夹角, $\phi$  为  $OP$  与  $Z$  轴的夹角,由于  $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$ ,则可得如下简单的线性映射函数:

$$u = \theta/2\pi, v = \phi/\pi \quad (1)$$

另外为了方便计算可再利用

$$\begin{cases} x = \cos\theta \cdot \sin\phi \\ y = \sin\theta \cdot \sin\phi \\ z = \cos\phi \end{cases} \quad (2)$$

将直角坐标  $(x, y, z)$  转换为经纬坐标,然后根据式(1)就可以求出其对应的纹理坐标  $(u, v)$ 。

由于球面可由三角形网格构成,那么只要知道了每个三角形网格的 3 个端点在纹理图上的纹理坐标,便可以结合调和映射的方法<sup>[3]</sup>计算出每个三角形网格内部任意一

收稿日期:2005-12-12

基金项目:东南大学计划基金资助项目(9222001286)

作者简介:刘晓梅(1982-),女,江苏苏州人,硕士研究生,研究方向为虚拟现实;赵正旭,教授,博导,研究方向为虚拟现实。

点的纹理坐标,从而将每个三角形网格内部的点与纹理图上相应区域内部的点一一映射起来,实现对整个球面的纹理映射。但是由于球面两极点的特殊性,使得纹理映射不可避免地两极处出现了纹理汇聚现象,在南北极圈内的三角形区域在映射后产生了明显的纹理变形。

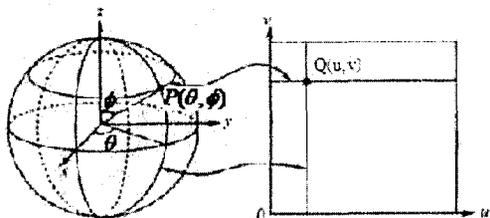


图 1 整体球面的纹理映射

### 1.2 半球面纹理映射算法

Bier 和 Sloan 提出了一种基于立体投影的半球面纹理映射算法,用于将二维圆形纹理图案映射到上半球面<sup>[1]</sup>。基于立体投影的半球面映射原理如图 2 所示。

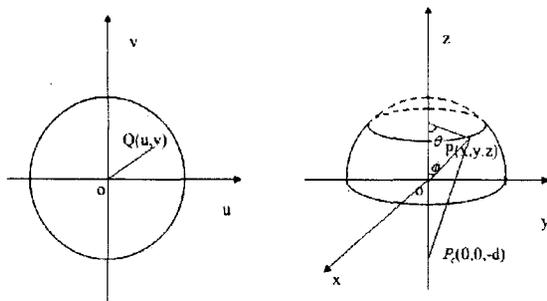


图 2 基于立体投影的半球面映射

假设球半径为 1,球心位于三维坐标系的原点,球的赤道面与该坐标系的 XOY 平面重合。设投影中心  $P_c$  位于  $z = -d$  的位置,半球面上的点  $P(x, y, z)$  在纹理平面上的投影为  $Q(u, v)$ 。 $P$  点可用球面经纬坐标  $(\theta, \phi)$  表示, $Q$  点可用平面极坐标  $(r, \theta)$  表示,得到  $P, Q$  两点的坐标关系为:

$$r = \frac{(d+1)\sin\theta}{d+\cos\theta} = \frac{(d+1)\sqrt{x^2+y^2}}{d+z} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u = r \cdot \cos\theta = \frac{(d+1)x}{d+z} \\ v = r \cdot \sin\theta = \frac{(d+1)y}{d+z} \end{cases} \quad (4)$$

该立体投影的半球面映射公式<sup>[4]</sup>是通过投影来确定纹理平面坐标与半球面坐标之间的对应关系,将纹理平面上的圆弧映射为半球面上的纬线,而将平面上的径向线段映射为半球面上的经线,从而实现将平面圆形纹理区映射到半球面上。

如果将投影中心置于球面的负极点,那么就可以将式(4)简化为:

$$\begin{cases} u = \frac{2x}{1+z} \\ v = \frac{2y}{1+z} \end{cases} \quad (5)$$

利用这种映射方法,极点附近没有出现纹理汇聚现

象,映射纹理的质量也比上述整球面映射有所提高,但靠近赤道部位的映射纹理方格逐渐变小,同时,长宽比也未能保持不变。Bier 和 Sloan 为纹理形变问题提出了球面映射中纹理不变形的 3 个判断准则<sup>[1]</sup>:

(1)点的相邻性,即纹理平面上的相邻点映射到球面后仍然是相邻的;

(2)面积的等比性,即纹理平面上各个区域和球面上与之对应的映射区域之面积比保持不变;

(3)长宽比的不变性,即一个  $10 \times 20$  单位的图案映射至球面上的近似长方形面片也能保持 1:2 的长宽比。

基于立体投影的半球面纹理映射算法在映射过程中纹理平面和球面上对应映射区域的面积分别为:

①纹理平面上圆形区域的面积:

$$S_1 = \theta \cdot r^2 = \theta \left( \frac{(d+1)\sin\theta}{d+\cos\theta} \right)^2 \quad (6)$$

②球面上对应区域的面积:

$$S_2 = \int_0^\theta 2\theta \sin\omega d\omega = 2\theta(1 - \cos\theta) \quad (7)$$

可见,不论投影中心如何选择,在映射过程中  $S_1$  与  $S_2$  都不可能保持一定的比例关系。另一方面,基于立体投影的半球面纹理映射算法在映射过程中将纹理平面上圆的半径和圆周分别映射为半球面上的经线和纬线,圆的周长与半径之比为常数  $2\pi$ ;半球面上任意纬线的周长与对应的经纬长度之比为  $\pi \sin\theta / \theta$ ,是随  $\theta$  值变化的,并不是一个常数,因此,纹理平面上相互垂直的线段在映射后不能保持长度比不变。

综上所述,基于立体投影的半球面纹理映射算法能满足准则(1),却不能满足纹理不变形准则(2)与(3)。

### 1.3 球冠映射算法

任何一种球面纹理映射算法都不可能同时满足上述 3 个纹理不变形准则,这是因为球面是一种不可展曲面<sup>[2]</sup>。为此,需寻找能满足两个准则的算法。

从准则(2)出发,设计一种基于面积比不变性约束的球冠映射算法。该算法的基本思想是将圆形纹理平面映射到球冠表面,且映射区域即球冠的大小可根据需要确定,最大为半球面。为了便于分析,将圆形纹理平面与球冠半径都取为 1,设纹理平面上任一点  $Q$  的极坐标为  $(r, \alpha)$ ,映射到球冠上对应点  $P$  的经纬坐标为  $(\theta, \phi)$ 。即将单位圆形纹理平面映射到纬度不大于  $\theta$  的球冠上,如图 3 所示。

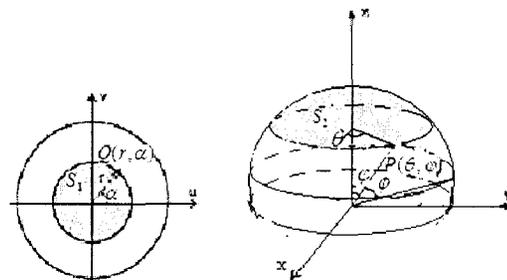


图 3 基于面积比不变性约束的球冠映射

由于球冠就是半球面的一部分,圆形纹理平面到球冠

的映射跟它到半球面的映射原理相同。首先将纹理平面上的径向线段映射为球冠上的一段经线,令  $P$  点的经度  $\theta$  和  $Q$  点的极角  $\alpha$  相等,即  $\alpha = \theta$ 。将纹理平面上的任一圆弧映射为球冠上的一段纬线。由于采用了面积比不变性约束,那么  $S_2/S_1$  在映射过程中需要保持为一常数,设为  $K$ 。

由式(6)和式(7)知:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{2\pi(1 - \cos\varphi)}{\pi \cdot r^2} = \frac{2(1 - \cos\varphi)}{r^2} = K \quad (8)$$

由上式可知,若能求得  $K$ ,那么便可以根据式(8)来求得  $r$ ,所以下面的关键是确定  $K$  值。

将整个圆形纹理区域映射到了纬度不大于  $\varphi$  的球冠上,其中  $0 < \varphi \leq \pi/2$ 。那么就可以求得边界条件为:  $r = 1, \varphi = \varphi$ 。故此可以求出  $K = 2(1 - \cos\varphi)$ 。

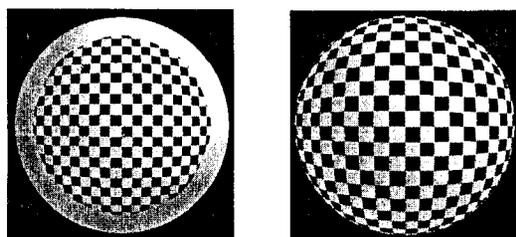
再根据  $K$  值将其代入式(8)可得当  $r \in [0, 1]$  时:

$$r = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{1 - \cos\theta}} \quad (9)$$

根据式(4),由纹理坐标与半球面坐标间的关系可知:

$$\begin{cases} u = r \cos\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{1 - \cos\theta}} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos\theta}} \frac{x}{\sqrt{1+z}} \\ v = r \sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{1 - \cos\theta}} \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos\theta}} \frac{y}{\sqrt{1+z}} \end{cases} \quad (10)$$

由于在该算法中  $\frac{S_2}{S_1} = 2(1 - \cos\varphi)$ ,这就说明了在将纹理平面上的任一圆弧映射为球冠上纬度不小于  $\varphi$  ( $0 < \varphi \leq \theta$ ) 的区域的过程中,其面积之比只与  $\varphi$  有关。如果  $\varphi$  一旦取定,那么其面积比也就确定不变了,从而也就满足了纹理不变形的第二个准则。同时由于  $\varphi$  的大小可根据需要选定,那么映射区域即球冠的大小也就可根据需要来确定。其效果图如图 4 所示。



(a)  $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(b)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

图 4 球冠映射效果

通过比较,就可以明显看出采用面积比不变性约束的球冠映射的映射效果是最好的,它映射后纹理方格大小不变,消除了纹理方格在两极处汇聚或从两极到赤道逐渐缩小的现象。

#### 1.4 球冠映射算法实现步骤

基于面积比不变性约束的球冠映射算法的映射过程具体来说可分以下两步来完成:

(1) 选择一个半径适当的球冠面,用它来包围待绘表面纹理的物体,使球冠的极轴穿过物体底部的中心点,并

根据物体的具体形状适当选取球心到物体底部的距离。然后利用上述采用面积比不变性约束的球冠纹理映射算法,将纹理图案映射到球冠面上。

(2) 从参考文献[5]提出的反射光线法、物体表面法向法、物体中心法和中介曲面法中,选择中介曲面法来完成从球冠面到物体表面的纹理映射。对于物体表面任一点,从它到球心作一直线,与球冠相交,并将此交点作为球冠上的对应点,逐点将球冠上的纹理映射到物体表面。

## 2 算法实现的例子

为了验证此算法的映射效果,笔者在 Windows 环境下用 VC++ 和 OpenGL 对茶壶表面进行了将纹理图案映射到曲面上的实验,图 5 显示了将纹理图案映射到了茶壶表面不同区域所得的结果,从中可以明显看出该算法的优越性。

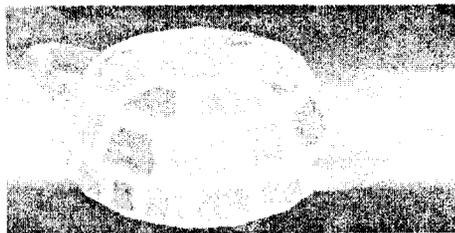


图 5 用新算法 ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) 绘制的茶壶

其中,图 5 给出了当  $\varphi = \pi/2$  时,采用基于面积比不变性约束的球冠映射算法的两步纹理映射方法,将纹理图案映射到了茶壶表面区域所得的结果。另外由于可以通过确定的值来选择映射区域表面的大小,那么就可以通过选择不同的映射区域来实现在同一对象上绘制不同的纹理图案。如图 6 所示,它将两幅不同的纹理图案分别绘制到了同一茶壶对象上,实现了同一物体上不同纹理图案的绘制,从而扩大了该算法的应用范围,提高了它的实用价值。

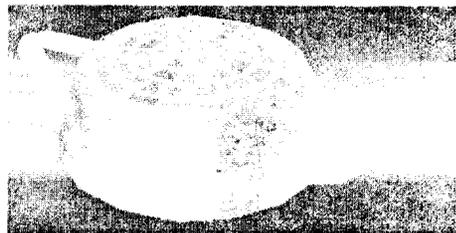


图 6 用新算法绘制不同图案的茶壶

## 3 结束语

理论分析和实验表明,文中改进的采用面积比不变性约束的球冠纹理映射算法,能同时满足不变形准则(1)和(2),映射生成的纹理变形小,应用它实现的两步纹理映射方法可显著地改善映射纹理质量。并且由于该算法计算简单,纹理映射速度快,所以在仿真和虚拟现实等方面具有实用价值。

(下转第 43 页)

据是否合法和满足约束条件。若输入的数据不合法或不满足约束条件时,则提示用户检查数据并更正,再单击“开始计算”按钮重新检测计算。若输入的数据合法,则 cmdComputer\_Click 开始调用 left\_computer 函数计算 A 式的值 s 并调用 insertHash (S) 函数将它们插入哈希表,在 insertHash (S) 函数中先调用 searchHash (S) 查找 s 是否已在哈希表中,若在则不必插入,否则插进哈希表。当 left\_computer 执行完毕后,cmdComputer\_Click 函数调用 right\_computer 函数,该函数先枚举出 B 代数式的所有取值,每计算一个值调用一次 searchHash (S) 函数查找哈希表中是否有使得  $A + B = 0$  的值,并统计结果。right\_computer 函数执行完后,cmdComputer\_Click 函数调用 output\_answer 函数输出结果。

当 Output\_answer 函数执行完毕,此时界面将会出现一个“重新计算”按钮,若单击该按钮,程序将继续按上述步骤执行一次。若用户单击“退出”按钮,程序将结束。

#### 4 计算机仿真结果

例1 给定  $n = 4, M = 150, k_1 = k_3 = 1, k_2 = k_4 = -1, p_i = 2 (i = 1, 2, 3), p_4 = 3$ , 该  $n$  元高次方程的个数通过计算机仿真后,结果为 5 167,如图 2 所示。



图 2 一组测试数据

例2 给定  $n = 6, M = 150, k_1 = k_2 = k_3 = 1, k_4 = k_5 = k_6 = -1, p_i = 1$ , 解的个数超出约束范围( $< 2^{31}$ ),如图 3 所示。

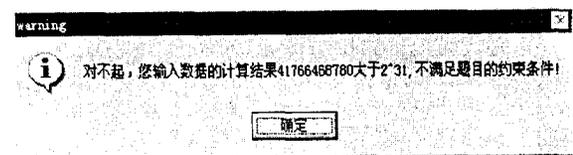


图 3 第三组测试数据

表 1 给出该方程所有可能含对约束条件检测的仿真结果。

表 1 计算机仿真结果

参数组号	N	M	$k_1, p_1$	$k_2, p_2$	$k_3, p_3$	$k_4, p_4$	$k_5, p_5$	$k_6, p_6$	结果	备注
1	3	150	1, 2	-1, 2	1, 2				178	正常
2	4	150	1, 2	-1, 2	1, 2	-1, 3			5167	正常
3	6	150	1, 1	1, 1	1, 1	-1, 1	-1, 1	-1, 1		解的个数超范围
4	3	150	1, 6	1, 1	1, 1					各项绝对值和超范围
5	2	150	1, 3	-1, 1	1, 1					系数、指数个数大于 N
6	3	151	1, 6	-1, 1	1, 1					M 的值不符合约束条件
7	2.1	150	1, 3	1, 2						N 的值不符合约束条件
8	2	8.5	1, 2	1, 2						M 的值不符合约束条件
9	3	150	2.5, 2	1, 2	1, 2					系数值不符合约束条件
10	3	150	1, 2	1, 2.5	1, 2					指数值不符合约束条件

#### 5 结论

主要考虑的是如何降低程序执行的时间复杂度,通过二分法减小枚举范围实现了这一目的。在解题过程中将方程分为 A, B 两部分,然后计算 A 的所有值,将它们存入一个数组中,然后再枚举 B 的值,进而在 A 产生的数组中找使  $A + B = 0$  的数,并统计结果;同时为进一步降低时间复杂度,利用了哈希技术。另外,在程序设计时利用 VB 语言编程,实现了可视化和交互功能。

该文思想使笔者所在学校学生在首届全国计算机仿真大奖赛中荣获第二名。

#### 参考文献:

- [1] 王晓东. 计算机算法设计与分析[M]. 北京:电子工业出版社, 2001.
- [2] 林尔桢. 方程的解数[EB/OL]. <http://www.mydrs.org/program/list.asp?id=261-NOI2001-2001-10-27>.
- [3] 刘 翀. 浅谈竞赛中哈希表的应用[EB/OL]. <http://www.chinaschool.org/acasai/sf/hxb-04.htm-2003-07-31>.
- [4] 马子彦. 方程迭代求根加速收敛的算法研究[J]. 微机发展, 1996, 6(6): 28-30.
- [5] 夏红霞, 钟 璐. 哈希函数在优先队列中的应用[J]. 微机发展, 1994, 4(3): 21-24.
- [6] 陈宗海. 系统仿真技术及其应用[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2001.

(上接第 3 页)

#### 参考文献:

- [1] Bier E A, Sloan K R. Two-part texture mappings[J]. IEEE Computer Graphics and Application, 1986, 6(9): 40-53.
- [2] 范 波, 吴慧中. 多面体表面纹理映射方法的研究[J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(4): 446-450.

- [3] 周 昆, 潘志庚. 调和映射的构造及其在图形学中的应用[J]. 中国图像图形学报, 1998, 3(7): 578-582.
- [4] 江巨浪, 张佑生. 一种应用面积等比约束的半球面纹理映射算法[J]. 系统仿真学报, 2004, 16(9): 1982-1984.
- [5] Rogers D F. Procedural Elements for Computer Graphics [M]. Beijing: China Machine Press, 2002. 531-534.