

## 偏序关系中盖住集的判定

汪小燕<sup>1,2</sup>, 王浩<sup>2</sup>

(1. 安徽工业大学 计算机学院, 安徽 马鞍山 243002;

2. 合肥工业大学 计算机与信息学院, 安徽 合肥 230009)

**摘要:** 直接根据现有离散数学教材中偏序关系中“盖住”的定义, 来判定偏序关系中的盖住集, 有时比较困难。文中通过对教材中偏序关系中“盖住”定义的深入分析, 将定义“对于任意  $a, b \in A$ , 当  $\langle a, b \rangle \in R, a \neq b$  且没有其它元素  $c$  满足  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ , 则称元素  $b$  盖住元素  $a$ , 并且记  $\text{COVR} = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in A; b \text{ 盖住 } a\}$ ”改为“对于任意  $\langle a, b \rangle \in R$  且  $a = b$ , 则  $\langle a, b \rangle \in I_R$ , 令  $R_1 = R - I_R$ , 则  $R_1 - (R_1 \circ R_1)$  为盖住集”, 得出一种等价的定义形式。利用该等价定义可以较好地实现盖住集的判定。

**关键词:** 离散数学; 偏序关系; 盖住集

**中图分类号:** O158

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2006)08-0075-02

## Judgement of Covering Assembly in Partially Ordered Relation

WANG Xiao-yan<sup>1,2</sup>, WANG Hao<sup>2</sup>

(1. School of Computer, Anhui University of Technology, Maanshan 243002, China;

2. School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** There is a bit difficult in judging covering assembly in partially ordered relation on a basis of its definition in discrete mathematic. Here gives an equivalent definition, by replacing “对于任意  $a, b \in A$ , 当  $\langle a, b \rangle \in R, a \neq b$  且没有其它元素  $c$  满足  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ , 则称元素  $b$  盖住元素  $a$ , 并且记  $\text{COVR} = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in A; b \text{ 盖住 } a\}$ ” with “对于任意  $\langle a, b \rangle \in R$  且  $a = b$ , 则  $\langle a, b \rangle \in I_R$ , 令  $R_1 = R - I_R$ , 则  $R_1 - (R_1 \circ R_1)$  为盖住集”. With this equivalent definition, it is easier to judge covering assembly in partially ordered relation.

**Key words:** discrete mathematic; partially ordered relation; covering assembly

## 0 引言

在一个集合上, 常常要考虑元素的次序关系, 其中很重要的一类关系称作偏序关系。定义在某一集合上的二元关系具有自反性、反对称性以及传递性, 则该关系为偏序关系。而在偏序关系中, “盖住”能清楚地描述偏序集合中的层次关系。实际判定某个盖住集时, 根据现有定义有时则比较困难。文中通过对偏序关系中“盖住”定义的深入分析, 给出一种等价的定义形式, 利用该等价定义可以较好地实现盖住集的判定。

## 1 偏序关系中“盖住”定义及应用

在现有的离散数学教材<sup>[1]</sup>中, 对偏序关系中“盖住”的定义如下:

**定义** 对于任意  $a, b \in A$ , 当  $\langle a, b \rangle \in R, a \neq b$  且没有其它元素  $c$  满足  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ ,

则称元素  $b$  盖住元素  $a$ , 并且记  $\text{COVR} = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in A; b \text{ 盖住 } a\}$ 。在文献[2,3]中, 也有类似的定义。

下面举一个例子来说明该定义的应用。

**例1** 给定集合  $A = \{2, 3, 6, 8\}$ , 令  $R = \{\langle X, Y \rangle \mid X \text{ 整除 } Y\}$ ,  $R$  是  $A$  上的偏序关系, 试判定  $R$  上的盖住集  $\text{COVR}$ 。

**解:**  $R = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\}$

在该例中, 所给的  $X$  与  $Y$  之间的关系是人们比较熟悉的整除运算。因此, 直接根据定义就可以进行盖住集的判定, 则  $\text{COVR} = \{\langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\}$ 。但是, 当某个二元关系是以序对集合的形式给出的时候, 并且该二元关系本身不明显<sup>[4,5]</sup>, 要实现盖住集的判定必须按照定义中的条件依次检查  $A$  中除去  $a = b$  后的所有的  $\langle a, b \rangle$  序对, 看是否存在  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ 。这样整个判定过程不仅显得无序, 而且容易混乱, 从而造成了最终的盖住集判定也比较困难。

下面通过举一个例子来说明。

**例2** 设集合  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $R$  是  $A$  上的偏序关系,  $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle$

收稿日期: 2005-11-15

**作者简介:** 汪小燕(1974-), 女, 安徽桐城人, 讲师, 硕士研究生, 研究方向为数据挖掘、计算机数据库; 王浩, 教授, 博士, 研究方向为 Agent、数据挖掘、软件工程。

$a, e >, < b, b >, < b, c >, < b, e >, < c, c >, < c, e >, < d, d >, < d, e >, < e, e > \}$ , 试判定  $R$  上的盖住集 COVR。

该例中所给的二元关系是以序对集合的形式给出的, 两个元素之间的关系不明显, 直接根据上述定义不好判定该偏序关系的盖住集 COVR。

## 2 偏序关系中“盖住”的等价定义及应用

通过对上述定义的分析, 给出以下的等价定义。

定义' 对于任意  $\langle a, b \rangle \in R$  且  $a = b$ , 则  $\langle a, b \rangle \in I_R$ , 令  $R_1 = R - I_R$ , 则  $R_1 - (R_1 \circ R_1)$  为盖住集。

文中所给的等价定义是立足于集合的观点, 应用此等价定义判定偏序关系的盖住集, 不仅有条理, 而且步骤清晰。可从以下几步求盖住集:

- (1) 首先从  $R$  中找出所有  $a = b$  的序对集合  $I_R$ 。
- (2) 计算集合  $R$  和  $I_R$  的差  $R_1$ , 即  $R_1 = R - I_R$ 。
- (3) 将  $R_1$  与其自身复合, 得集合  $R_2$ 。
- (4) 计算集合  $R_1$  和  $R_2$  的差, 则  $R_1 - R_2$  为盖住集。

因此, 实际用于偏序关系的盖住集的判定, 不仅效率高, 而且准确。

下面证明文中所给的等价定义与现有教材中的定义是等价的。将现有教材中的定义的前提条件分为前提 1 和前提 2:

前提 1: 对于任意  $a, b \in A$ , 当  $\langle a, b \rangle \in R, a \neq b$ ;

前提 2: 且没有其它元素  $c$  满足  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ 。

对于前提 1 实际上排除了  $R$  中所有  $a = b$  的序对, 而在文中所给的等价定义中“对于任意  $\langle a, b \rangle \in R$  且  $a = b$ , 则  $\langle a, b \rangle \in I_R$ , 令  $R_1 = R - I_R$ ”, 也排除了  $R$  中所有  $a = b$  的序对。即  $R_1 = \{ \langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \wedge \neg (\langle a, b \rangle \in I_R) \}$ 。

前提 2 实际上是在满足了前提 1 的基础上, 再排除所有满足“存在其它元素  $c$  满足  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ ”的  $\langle a, b \rangle$  序对,  $R$  中剩下的序对集合即为盖住集。

而在文中所给的等价定义中提出  $R_1 - (R_1 \circ R_1)$  为盖住集,  $R_1$  满足了前提 1 的条件,  $R_1 \circ R_1$  运算的结果正是所有满足“存在其它元素  $c$  满足  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ ”的  $\langle a, b \rangle$  序对集合。而  $R_1 - (R_1 \circ R_1)$  排除了所有满足“存在其它元素  $c$  满足  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ ”的  $\langle a, b \rangle$  序对。

故两种定义在实质上是等价的。

应用文中所给的等价定义可以很快地判定前面例 2 的盖住集。

例 3 设集合  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $R$  是  $A$  上的偏序关系。

$R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, e \rangle \}$ , 试判定  $R$  上的盖住集 COVR。

解:  $I_R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle \}$

$R_1 = R - I_R = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle \}$

$R_1 \circ R_1 = \{ \langle a, c \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle \}$

$\text{COVR} = R_1 - (R_1 \circ R_1) = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle \}$

## 3 结束语

文中通过对教材中偏序关系中“盖住”定义的深入分析, 将定义“对于任意  $a, b \in A$ , 当  $\langle a, b \rangle \in R, a \neq b$  且没有其它元素  $c$  满足  $\langle a, c \rangle \in R$  和  $\langle c, b \rangle \in R$ , 则称元素  $b$  盖住元素  $a$ , 并且记  $\text{COVR} = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in A; b \text{ 盖住 } a \}$ ”改为“对于任意  $\langle a, b \rangle \in R$  且  $a = b$ , 则  $\langle a, b \rangle \in I_R$ , 令  $R_1 = R - I_R$ , 则  $R_1 - (R_1 \circ R_1)$  为盖住集”, 得出一种等价的定义形式。文中所给的等价定义是立足于集合的观点, 应用此等价定义判定偏序关系的盖住集, 不仅有条理, 而且步骤清晰。

## 参考文献:

- [1] 左孝凌, 李为鉴, 刘永才. 离散数学[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1982.
- [2] Kolman B, Busby R C, Ross S C. Discrete Mathematical Structures (Fourth Edition) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.
- [3] 何光明, 王海艳. 离散数学学练考[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [4] 杨思春, 周云霞. 二元关系反对称性的判定[J]. 微机发展, 2004, 14(3): 93-94.
- [5] 杨思春, 王小林. 二元关系传递性研究[J]. 微机发展, 2003, 13(10): 88-89.

(上接第 74 页)

- [1] 计算机科学, 2003, 30(9): 158-161.
- [2] 何敬鹏, 周容, 俞建新. 一个小型集群系统的建立和初步应用[J]. 计算机应用研究, 2004(1): 227-230.
- [3] Gropp W, Lusk E, Doss N, et al. A high-performance Portable Implementation of the MPI Message-passing Interface

standard[J]. Parallel Computing, 1996, 22(6): 789-828.

- [4] 王萃寒, 赵晨, 许小刚, 等. 分布式并行计算环境: MPI [J]. 计算机科学, 2003, 30(1): 25-26.
- [5] 张岳, 陈渝, 孙亦嘉, 等. MPI 设计结构的分析和比较 [J]. 计算机科学, 2004, 31(2): 163-166.