

双环网络直径的对称性及应用

陈业斌, 周建钦

(安徽工业大学 计算机学院, 安徽 马鞍山 243002)

摘要: 双环网络是计算机互连网络、大规模并行处理系统和通讯系统的一类重要拓扑结构。双环网络有效性的一个重要参数是信息的传输延迟, 它可以用其图的直径来度量。文中从双环网络的图论模型出发, 证明了双环网络中一个被广泛关注的问题, 即双环网络直径的对称性, 并给出了一些应用。

关键词: 双环网络; 直径; 最优; 紧优

中图分类号: O157.6; TP302

文献标识码: A

文章编号: 1005-3751(2006)03-0155-03

Symmetry and Application About Double Loop Networks' Diameter

CHEN Ye-bin, ZHOU Jian-qin

(School of Computer Science, Anhui University of Technology, Maanshan 243002, China)

Abstract: Double loop networks are computer interlinked networks, they are one important topological structure. One important parameter about double loop networks is information transmit delay, it may be measured with the fig diameter. This paper starts off with the fig model, proves one important matter about double loop networks, namely, the symmetry about double loop networks, and enumerates some applications.

Key words: double loop networks; diameter; optimal; tight optimal

0 引言

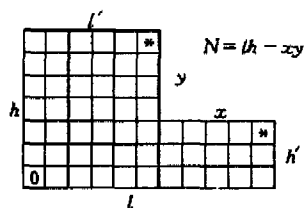
双环网络是计算机互连网络或通讯系统的一类重要拓扑结构, 其图论模型是指这样一个有向图 $G(N; s)$: 它的每个顶点记为 $0, 1, 2, \dots, N-1$, 并从每个顶点 i 发出两条有向边 $i \rightarrow i+1 \pmod{N}$ 和 $i \rightarrow i+s \pmod{N}$, 其中 s 是自然数, 而且 $1 < s < N$ 。从定义立即可知, 对于给定的 N, s 唯一决定了 $G(N; s)$ 的结构, 因而也决定了它的直径。记 $G(N; s)$ 的直径为 $d(N; s)$, 并记 $d(N) = \min\{d(N; s); 1 < s < N\}$ 。已证明了: $d(N) \geq \lg(N) = \lceil \sqrt{3N} \rceil - 2$ 。一个被广泛关注的问题是^[1-6]: 对于给定的 N , 确定 $d(N)$, 并找出 s , 使得 $d(N; s) = d(N)$ 。文中证明了 $d(N; s) = d(N; N+1-s)$, $1 < s < N$, 并给出了该性质的一些应用。

1 记号和定理

$G(N; s)$ 是点可迁的强连通有向图, 所以要研究其直径只需考察从顶点 0 到其它顶点的距离。为此, 在笛卡尔

平面直角坐标系中, 令 X 轴的单位为 1 (或 s), Y 轴的单位为 s (或 1), 把第一象限中的所有格点 (x, y) 按下列顺序排成序列: $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), \dots, (j, 0), (j-1, 1), \dots, (j-i, i), \dots, (1, j-1), (0, j), \dots$ 。并且依次在每一格点 (x, y) 的右上角的单位方格内安置一个数 $n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, 其中 $n = x + ys \pmod{N}$ 。如果在此之前数 n 已出现过, 则空出此方格, 考察下一个格点, 直到所有的数 $0, 1, 2, \dots, N-1$ 都出现时为止。已经证明: 由 $G(N; s)$ 所确定的 N 个方格组成的构图呈图 1 所示的面积为 N 个单位的 L 形域, 记为 $L(N; s)$ 。

如图 1 所示, 由 l, h, x, y 确定的面积为 N 的 L 形区域称为 L 形瓦, 记为 $L(N; l, h, x, y)$, 其中 l, h, x, y 都是整数, 并且规定 $l, h \geq 2, 0 \leq x < l, 1 \leq y < h, y < l, x \leq h$ 。令 $D(L(N; l, h, x, y)) = \max\{h + l' - 2, l + h' - 2\}$ 。记由 $G(N; s)$ 确定的 L 形瓦的直径为 $D(N; s)$ 。根据

图 1 $G(N; s)$ 强连通有向图

收稿日期: 2005-06-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60473142)

作者简介: 陈业斌(1971—), 男, 安徽全椒人, 讲师, 研究方向为人工智能软件、分布式数据库; 周建钦, 教授, 硕士, 研究方向为人工智能软件、网络安全。

上述记号和定义可知,对任何 $G(N; s)$, 均有 $d(N; s) = D(N; s)$ 。

为了方便研究双环网络直径的对称性,考察覆盖 L 形瓦的最小等腰直角三角形。在笛卡尔平面直角坐标系中,令 X 轴的单位为 1(或 s), Y 轴的单位为 s (或 1)。把第一象限中的所有格点 (x, y) 按下列顺序排成序列: $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), \dots, (j, 0), (j-1, 1), \dots, (j-i, i), \dots, (1, j-1), (0, j), \dots$ 。并且依次在每一格点 (x, y) 的右上角的单位方格内安置一个数 $n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, 其中 $n = x + ys \pmod{N}$ 。直到所有的数 $0, 1, 2, \dots, N-1$ 都出现, 并且若格点 $(j, 0), (j-1, 1), \dots, (j-i, i), \dots, (1, j-1), (0, j)$ 中已有数, 则根据 $n = x + ys \pmod{N}$ 将格点 $(j, 0), (j-1, 1), \dots, (j-i, i), \dots, (1, j-1), (0, j)$ 全部添满, 即得覆盖 L 形瓦的最小等腰直角三角形。 L 形瓦的直径为 D 当且仅当该等腰直角三角形的直角边长为 $D-1$, 这里记等腰直角三角形的直角边长减一为其直径。这里用矩阵的方式表述等腰直角三角形内的数。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots a_{kk} \end{pmatrix}$$

上述下三角矩阵 A 代表的等腰直角三角形, 其直径为 $k-1$ 。因为矩阵 A 是由 $G(N; s)$ 得到, 故 $(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kk})$ 分别为 $(0, 1, 2, \dots, k-1)$ 。

$a_{k1} = 0 \pmod{N}, a_{k-1,1} = s \pmod{N}, \dots, a_{21} = s(k-2) \pmod{N}, a_{11} = s(k-1) \pmod{N}$

或者说矩阵 A 内, 同一行内从左向右每个元素加一 \pmod{N} , 如 0 比 $N-1$ 加一 \pmod{N} , 同一列内从下向上每个元素加 $s \pmod{N}$ 。矩阵 A 内全部元素组成的集合包含 $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 。

对每个 $G(N; s)$, 显然对应唯一的一个上述的下三角矩阵。

下面给出 3 个简单的引理。

引理 1 由 $G(N; s)$ 得到的下三角矩阵 A 中, 对角线上元素为 $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{k-1,k-1}, a_{kk})$, 从右向左每个元素加 $s-1 \pmod{N}$, 从左向右每个元素加 $-(s-1) = N+1-s \pmod{N}$ 。

引理 2 若矩阵 A 内全部元素组成的集合包含 $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, 对矩阵 A 内每个元素加 m , 这里 m 是整数, 加法为以 N 为模的同余加法, 则变换后矩阵 A 内全部元素组成的集合仍包含 $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 。

引理 3 若矩阵 A 内全部元素组成的集合包含 $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, 对矩阵 A 内每个元素取向反数, 这里取向反数后, 仍变换为以 N 为模的正整数(如 -1 变换为 $N-1$), 则变换后矩阵 A 内全部元素组成的集合仍包含 $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 。

对下三角矩阵 A 依次做以下变换:

(1) 对矩阵 A 内每个元素取向反数, 这里取向反数后, 仍变换为以 N 为模的正整数;

(2) 对矩阵 A 内每个元素加 $k-1$, 加法为以 N 为模的同余加法;

(3) 对矩阵 A 的每一行, 按与原来相反顺序排列, 即将 $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ii})$ 排列为 $(a_{ii}, a_{i,i-1}, \dots, a_{i2}, a_{i1})$ 。

设得到下三角矩阵 B , 则下三角矩阵 B 的第一列元素由下三角矩阵 A 中对角线上元素变换而来。

由引理 2 和引理 3, 知道矩阵 B 内全部元素组成的集合仍包含 $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 。

且矩阵 B 最下面一行元素分别为 $(0, 1, 2, \dots, k-1)$, 同一行内从左向右每个元素加一 \pmod{N} , 同一列内从下向上每个元素加 $-(s-1) = N+1-s \pmod{N}$ 。

所以矩阵 B 包含由 $G(N; N+1-s)$ 得到的下三角矩阵, 即 $G(N; N+1-s)$ 的直径 $\leq G(N; s)$ 的直径。

完全类似地可以证明 $G(N; s)$ 的直径 $\leq G(N; N+1-s)$ 的直径。于是有下面的结论。

定理 1 设 $G(N; s)$ 和 $G(N; N+1-s)$ 分别是由双环网络得到的有向图, 且 $1 < s < N$, 则 $G(N; s)$ 的直径 = $G(N; N+1-s)$ 的直径。

徐俊明在文献[1]中研究了双环网络的另一种图论模型 $G(N; r, s)$: 它的每个顶点记为 $0, 1, 2, \dots, N-1$, 并从每个顶点 i 发出两条有向边 $i \rightarrow i+r \pmod{N}$ 和 $i \rightarrow i+s \pmod{N}$, 其中 r 和 s 是自然数, 而且 $1 \leq r \neq s < N$ 。由于 r 和 s 的对称性, 这里不妨假设 $1 \leq r < s < N$ 。与 $G(N; s)$ 的情况类似, 可以定义由 $G(N; r, s)$ 得到的下三角矩阵, 从而可以证明下面的结论。

定理 2 设 $G(N; r, s)$ 和 $G(N; r, N+r-s)$ 分别是由双环网络得到的有向图, 且 $1 \leq r < s < N$, 则 $G(N; r, s)$ 的直径 = $G(N; r, N+r-s)$ 的直径。

显然, 定理 1 是定理 2 当 $r=1$ 时的特殊情况。

2 定理的应用

双环网络有效性的一个重要参数是信息的传输延迟, 它可以用其图的直径来度量。

一般地, 记 $G(N; r, s)$ 的直径为 $d(N; r, s)$, 定义最优的直径为:

$$d(N) = \min\{d(N; r, s) \mid 1 \leq r \neq s < N\}$$

根据定理 2, 再由于 r 和 s 的对称性, 我们有:

$$d(N) = \min\{d(N; r, s) \mid 1 \leq r \neq s < N\} = \min\{d(N; r, s) \mid 1 \leq r < s < (N+r)/2+1\}$$

若 $G(N; r, s)$ 的直径 $d(N; r, s) = d(N)$, 则称 $G(N; r, s)$ 是最优的^[1]。因而搜寻最优或紧优^[2] $G(N; r, s)$ 的范围可以减少一半。

根据定理 2, 现在已知的关于双环网络直径的结论, 例如文献[1~6], 大部分都可以适当推广。

李乔等人在文献[2]的例 2 中给出紧优 $G(N; s)$ 的无限族 $\{G(3t^2+4t; s); t=2e+1, s=6e^2+7e+2, e \geq 1\}$,

$e=1$ 时为 $G(39,15)$, $e=2$ 时为 $G(95,40)$ 。根据定理 1, 易得紧优 $G(N;s)$ 的无限族 $\{G(3t^2+4t;s):t=2e+1,s=6e^2+13e+6,e\geq 1\}$, $e=1$ 时为 $G(39,25)$, $e=2$ 时为 $G(95,56)$ 。

在文献[2]中列出了 69 类紧优和 33 类几乎紧优双环网络无限族,均可根据定理 1,列出对称的 69 类紧优和 33 类几乎紧优双环网络无限族。

徐俊明在文献[1]中研究了双环网络的另一种图论模型 $G(N;r,s)$,根据定理 2,文献[1]中的定理 1,2,3 也可推广。如由文献[1]中的定理 3 可得:

命题 A 设 Z 是非负整数无限集,则 $\{G(3t^2+4t-11;3,3t^2+t-6):t\in Z,t\geq 59\}$ 是一个紧优双环网络无限族,其直径为 $3t$;而 $\{G(21168e^2+30072e+10668;3,21168e^2+29820e+10496):e\in Z\}$ 是其中一个奇异的无限子族,其直径为 $252e+177$;它们的起始元素是 $G(10668;3,10496)$,其直径为 177;当 $e=1$ 时为 $G(61908;3,61484)$,其直径为 429。

徐俊明等人在文献[6]中研究了一类 4 紧优双环网无限族,根据定理 1,文献[6]中的定理 3,4 也可推广。如由文献[6]中的定理 4 可得:

命题 B 设 $n(t)=3t^2+6t-26$, $t=t(g)=14812g^2+3036g+151$, $s(g)=643877640g^4+263638788g^3+40175832g^2+2700207g+67520$, 则 $\{G$

$(n(t(g));s(g):g=g(e)=22\cdot 85^2e,e\in Z)\}$ 是 4 紧优双环网无限族,直径为 $3t+5$,起始元素是 $G(69283;67520)$,直径为 458。

3 结束语

文中从双环网络的图论模型出发,研究了双环网络直径的对称性,若 $G(N;r,s)$ 的直径 $d(N;r,s)=d(N)$,则称 $G(N;r,s)$ 是最优的。因而搜寻最优或紧优 $G(N;r,s)$ 的范围可以减少一半。

参考文献:

- [1] 徐俊明. 计算机互连双环网络的最优设计[J]. 中国科学, E 辑, 1999, 29(3): 272-278.
- [2] 李 乔, 徐俊明, 张忠良. 最优双环网络的无限族[J]. 中国科学, A 辑, 1993, 23(9): 979-992.
- [3] 徐俊明. 不含紧优和几乎紧优双环网络无限族[J]. 科学通报, 1999, 44(5): 486-490.
- [4] 徐俊明. 2 紧优双环网络无限族[J]. 高校应用数学学报, A 辑, 2000, 15(2): 148-152.
- [5] 徐俊明, 尹治军. 7 类新的 2 紧优双环网无限族[J]. 中国科学技术大学学报, 2002, 32(4): 399-402.
- [6] 徐俊明, 刘 琦. 一类 4 紧优双环网无限族[J]. 中国科学, A 辑, 2003, 33(1): 71-74.

(上接第 154 页)

了表现雪粒子形状是不规则的,文中采用了 3 种纹理,在粒子产生时随机的选取。这样比较好地解决了绘制速度和真实性的矛盾,达到了系统需要的性能。

3 实验结果和结论

笔者把该降雪模型应用在坦克分队战术综合演练仿真系统中,通过设置粒子系统的密度、粒子的大小和粒子下降的速度来模拟下雪的强度,通过赋予粒子在 x,z 轴方向上一定的速度来模拟风对雪的影响。用链表结构来管理粒子系统,每一帧绘制粒子时先对其判断是否消亡,再对活动的粒子进行绘制,很好地保证了处于活动状态的粒子数量。实验证明,该降雪模型能够满足一定的需要。部分结果如图 3、图 4 所示。

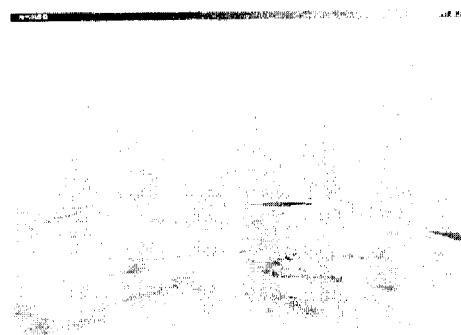


图 3 大雪效果

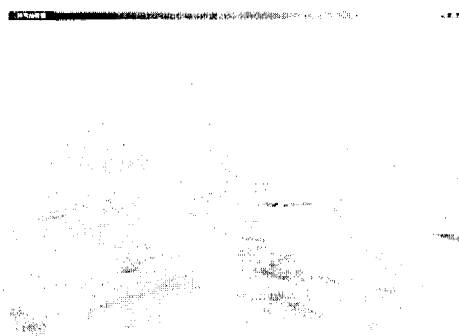


图 4 小雪效果

参考文献:

- [1] Reeves W T. Particle Systems - A Technique for Modelling a Class of Fuzzy Objects[J]. Computer Graphics, 1983, 17(3): 359-376.
- [2] 张 芹. 基于粒子系统的建模方法研究[J]. 计算机科学, 2003, 30: 144-146.
- [3] 唐熔锡, 汪嘉业, 彭群生, 等. 计算机图形学教程[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [4] 王润杰. 基于粒子系统的实时雨雪模拟[J]. 系统仿真学报, 2003, 15(4): 495-496.
- [5] 苏 虎. 列车驾驶视景仿真中自然现象的模拟[J]. 中国铁道科学, 2003, 24(1): 19-22.